فهرست

به‌نام خدا

مقدمه و انگیزه

این کتاب مشتمل بر ۱۰ فصل است، که در آن به مسائلی از ریاضی عمومی ۱ با موضوعاتی نظیر اعداد مختلط، حد، پیوستگی، مشتق، قضیهٔ رل، قضیهٔ میانگین، دنباله، سری، انتگرال، بهینه‌سازی و غیره پرداخته‌ایم. مسائل این کتاب برگرفته از امتحانات دانشگاه‌های برتر ایران و امریکا (نظیر ام.آی.تی، استنفورد، برکلی، پرینستون، میشیگان، یو.سی.ال.ای و هاروارد) است. همچنین از مسائل مسابقات دانشگاه‌های امریکا که در سطح ریاضی عمومی ۱ هستند نیز مسائل جالبی همراه با سال آنها آورده‌ایم. سعی کرده‌ایم مسائل نکته‌دار باشند. در ضمن حل کامل آنها را نیز در آخر کتاب آورده‌ایم.

هدف از نگارش این کتاب، بالا بردن سطح دانش ریاضی عمومی ۱ دانشجویان دورهٔ کارشناسی در تمام رشته‌هاست. مجموعه مسائل این کتاب همچنین می‌تواند منبع خوبی برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به مباحث پیوستگی، مشتق، انتگرال و مباحث دیگر مربوط به حساب دیفرانسیل و انتگرال باشد. دانشجویان و دانش‌آموزان علاقه‌مند به ریاضیات می‌توانند ازکیفیت و سطح سؤالات ریاضی عمومی ۱ دانشگاه‌های مختلف کشور و دنیا تصور خوبی به‌دست آورند و این فرصت را پیدا کنند که به دانسته‌های خود، تکنیک‌های جالبی اضافه کنند. مسائل مطرح شده بر حسب موضوع طبقه‌بندی شده‌اند و برخی از آنها بیش از یک راه‌حل دارند. در ابتدای کتاب قضیه‌ها و فرمول‌هایی آورده شده‌اند که انتظار می‌رود دانشجویان دورهٔ کارشناسی، آنها را هنگام حل مسائل در ذهن خود داشته باشند. این کتاب شامل ۴۰۰ مسئله است که تعدادی از آنها کلاسیک و تعدادی از آنها ابتکاری و خلاقانه‌اند. بسیاری از راه‌حل‌ها را نویسندگان کتاب ارائه کرده‌اند. از خوانندگانی که راه‌حل‌های ساده‌تری از مسائل دارند خواهشمندیم راه‌حل‌های خود را برای ما ارسال کنند. همچنین اگر مسائل جالبی از امتحانات ریاضی عمومی ۱ دانشگاه‌ها در اختیار دارید، بسیار سپاسگزار خواهیم بود که آنها را با ذکر نام دانشگاه و سال امتحان و در صورت امکان همراه با راه‌حل آنها برای ما به نشانی ایمیل s_akbari@sharif.edu ارسال کنید.

در پایان از محسن علی‌آبادی، محرم ایردموسی، اصغر بهمنی، عباس جعفرزاده، سمیه خلاشی قزل‌احمد، حسین سبزرو، کمال عزیزی، محمد غلامزاده محمودی، ابراهیم قربانی و علیرضا نقی‌پورکه به نوعی در تدوین این کتاب نقش داشته‌اند قدردانی و سپاسگزاری می‌کنیم.

سعید اکبری و امیرحسین قدرتی
دانشگاه صنعتی شریف
تابستان ۱۳۹۷

قضیه‌ها، فرمول‌ها و نامساوی‌های مهم

قضیه‌ها

در این فصل، قضیه‌ها و فرمول‌های مهمی از ریاضی عمومی ۱ را که در حل بسیاری از مسائل به‌کار می‌روند، همراه با مرجعی برای اثبات آنها، ذکر می‌کنیم.

قضیهٔ ۱ (قضیهٔ مقدار میانی [۱، ص. ۸۴]**)** اگر f روی بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته و s عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، آنگاه $c \in [a,b]$ وجود دارد به‌طوری که $f(c) = s$.

قضیهٔ ۲ (قضیهٔ ماکزیمم ـ مینیمم [۱، ص. ۸۲]**)** اگر f روی بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه $p,q \in [a,b]$ وجود دارند به‌طوری که برای هر $x \in [a,b]$، $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$.

قضیهٔ ۳ (قضیهٔ میانگین [۱، ص. ۱۳۶]**)** فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر است. در این‌صورت $c \in (a,b)$ وجود دارد به‌طوری که

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

قضیهٔ ۴ (قضیهٔ رُل [۱، ص. ۱۴۰]**)** فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر است. اگر $f(a) = f(b)$، آنگاه $c \in (a,b)$ وجود دارد به‌طوری که $f'(c) = ۰$.

قضیهٔ ۵ (قضیهٔ میانگین تعمیم‌یافته [۱، ص. ۱۴۱]**)** فرض کنید $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ دو تابع باشند که روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیرند. اگر برای هر $x \in (a,b)$، $g'(x) \neq ۰$، آنگاه $c \in (a,b)$ وجود دارد به‌طوری که

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

قضیهٔ ۶ (قاعدهٔ اول هوپیتال [۱، ص. ۲۲۸]**)** فرض کنید $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ دو تابع مشتق‌پذیر باشند و برای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $g'(x) \neq ۰$. همچنین فرض کنید:

(i) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = ۰$،

(ii) $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$، که در آن L متناهی است یا $L = \pm\infty$.

در این‌صورت $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

چنانچه $x \to a^+$ را با $x \to b^-$ یا $x \to c$ (برای $a < c < b$) جایگزین کنیم، حکم همچنان برقرار است. همچنین حالت‌های $a = -\infty$ و $b = +\infty$ نیز مجازند.

قضیهٔ ۷ (قاعدهٔ دوم هوپیتال [۱، ص. ۲۳۰]**)** فرض کنید $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ دو تابع مشتق‌پذیر باشند و برای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $g'(x) \neq ۰$. همچنین فرض کنید:

(i) $\lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$،

(ii) $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$، که در آن L متناهی است یا $L = \pm\infty$.

در این‌صورت $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

چنانچه $x \to a^+$ را با $x \to b^-$ یا $x \to c$ (برای $a < c < b$) جایگزین کنیم، حکم همچنان برقرار است. همچنین حالت‌های $a = -\infty$ و $b = +\infty$ نیز مجازند.

قضیهٔ ۸ (قضیهٔ تیلور [۱، ص. ۲۷۴]**)** فرض کنید برای هر t متعلق به بازه‌ای باز شامل a و x، مشتق $(n+۱)$ـام f در t موجود باشد. در این‌صورت $c \in (a,x)$ وجود دارد به‌طوری که

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^۲ + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{n+۱}(c)}{(n+۱)!}(x-a)^{n+۱}.$$

قضیهٔ ۹ (قضیهٔ تیلور تعمیم‌یافته [۳، ص. ۱۵۰]**)** فرض کنید مشتق nـام تابع f در نقطهٔ x موجود باشد. تعریف می‌کنیم:

$$R(h) = f(x+h) - \left(f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{۲} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n \right).$$

در این‌صورت داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{R(h)}{h^n}=0.$$

قضیهٔ ۱۰ (قضیهٔ میانگین برای انتگرال‌ها [۱، ص. ۳۰۸]**)** فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. در این‌صورت $c\in[a,b]$ وجود دارد به‌طوری که،

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a).$$

قضیهٔ ۱۱ (قضیهٔ میانگین تعمیم‌یافته برای انتگرال‌ها) فرض کنید $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ دو تابع پیوسته باشند و g روی بازهٔ $[a,b]$ تغییر علامت ندهد. در این‌صورت $c\in[a,b]$ وجود دارد به‌طوری‌که،

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

اثبات. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید g روی $[a,b]$ نامنفی است. تابع $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $h(t)=f(t)\int_a^b g(x)dx$ تعریف کنید. بنابر قضیه‌های مقدار میانی و ماکزیمم ـ مینیمم (قضیه‌های ۱ و ۲)، f روی بازهٔ $[a,b]$ مقدارهای ماکزیمم و مینیممی مانند M و m دارد و هر مقداری در بازهٔ $[m,M]$ را اختیار می‌کند. بنابراین h هر مقداری بین $m\int_a^b g(x)dx$ و $M\int_a^b g(x)dx$ را اختیار می‌کند. حال به‌دلیل نامنفی‌بودن g داریم،

$$m\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le M\int_a^b g(x)dx.$$

بنابراین $c\in[a,b]$ وجود دارد که $h(c)=\int_a^b f(x)g(x)dx$، و این حکم را ثابت می‌کند.

قضیهٔ ۱۲ (قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال [۱، ص. ۳۱۱]**)** فرض کنید I یک بازه، $a\in I$ و $f:I\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. همچنین فرض کنید $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. در این‌صورت داریم $F'(x)=f(x)$. همچنین اگر روی I، $G'(x)=f(x)$، آنگاه برای هر $b\in I$ داریم،

$$\int_a^b f(x)\,dx=G(b)-G(a).$$

قضیهٔ ۱۳ (فرمول طول منحنی [۱، ص. ۴۰۴]**)** فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و دارای مشتق پیوسته باشد. در این‌صورت طول منحنی $f(x)$ از نقطهٔ $x=a$ تا نقطهٔ $x=b$ برابر است با $\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$.

قضیهٔ ۱۴ ([۱، ص. ۵۰۱]) اگر $x\in\mathbb{R}$، آنگاه $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$.

قضیهٔ ۱۵ ([۱، ص. ۵۰۱]) هر دنبالهٔ صعودی و از بالا کران‌دار، همگراست. همچنین هر دنبالهٔ نزولی و از پایین کران‌دار نیز همگراست.

قضیهٔ ۱۶ (**p-سری**[۱، ص. ۵۱۱]) فرض کنید $p \in \mathbb{R}$. در این‌صورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ برای $p > 1$ همگرا و برای $p \leq 1$ واگراست.

قضیهٔ ۱۷ (**آزمون مقایسه**[۱، ص. ۵۱۳]) فرض کنید a_n و b_n دو دنباله باشند و $k > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر n، $0 \leq a_n \leq kb_n$.

(i) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

(ii) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نیز واگراست.

قضیهٔ ۱۸ (**آزمون مقایسهٔ حدی**[۱، ص. ۵۱۴]) فرض کنید a_n و b_n دو دنبالهٔ مثبت باشند و $L = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \frac{a_n}{b_n}$ که در آن L عددی حقیقی و نامنفی یا $+\infty$ است. در این‌صورت حکم‌های زیر برقرارند:

(i) اگر $L < \infty$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

(ii) اگر $L > 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز واگراست.

قضیهٔ ۱۹ (**آزمون نسبت**[۱، ص. ۵۱۶]) فرض کنید a_n دنباله‌ای مثبت باشد و $\rho = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ وجود داشته یا $+\infty$ باشد. در این‌صورت حکم‌های زیر برقرارند:

(i) اگر $0 \leq \rho < 1$، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

(ii) اگر $1 < \rho \leq \infty$، آنگاه $\underset{n\to\infty}{\text{حد}} a_n = \infty$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

(iii) اگر $\rho = 1$، در مورد همگرایی یا واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ چیزی نمی‌توان گفت.

قضیهٔ ۲۰ (**آزمون ریشه**[۱، ص. ۵۱۷]) فرض کنید a_n دنباله‌ای مثبت باشد و $\rho = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \sqrt[n]{a_n}$

وجود داشته یا $+\infty$ باشد. در این‌صورت حکم‌های زیر برقرارند:

(i) اگر $۰ \leq \rho < ۱$، آنگاه $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگراست.

(ii) اگر $۱ < \rho \leq +\infty$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ و $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ واگراست.

(iii) اگر $\rho = ۱$، آنگاه در مورد همگرایی و واگرایی $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ چیزی نمی‌توان گفت.

قضیهٔ ۲۱ ([۱، ص. ۵۲۰]) اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

قضیهٔ ۲۲ (**آزمون سری‌های متناوب**[۱، ص. ۵۲۲]) فرض کنید a_n یک دنباله باشد و عدد طبیعی N وجود داشته باشد به‌طوری که

(i) برای هر $n \geq N$، $a_n a_{n+۱} < ۰$،

(ii) برای هر $n \geq N$، $|a_{n+۱}| \leq |a_n|$،

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$.

در این‌صورت $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگراست.

قضیهٔ ۲۳ (**آزمون انتگرال**[۱، ص. ۵۱۰]) فرض کنید N عددی طبیعی باشد و $f : [N, \infty) \to \mathbb{R}$ پیوسته، نزولی و مثبت باشد. اگر $a_n = f(n)$، آنگاه

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a_n \quad \text{و} \quad \int_N^{\infty} f(t)dt$$

هر دو همگرا یا هر دو واگرا هستند.

قضیهٔ ۲۴ (**آزمون دیریکله یا آبل**[۴، ص. ۷۰]) فرض کنید a_n و b_n دو دنباله باشند و kای وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر r، $|\sum_{n=۱}^{r} a_n| \leq k$. اگر برای هر n، $b_n \geq b_{n+۱}$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = ۰$، آنگاه $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n b_n$ همگراست.

قضیهٔ ۲۵ (**آزمون کوشی**[۴، ص. ۶۱]) فرض کنید $a_۱ \geq a_۲ \geq \cdots \geq ۰$. در این‌صورت $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگراست اگر و تنها اگر $\sum_{k=۰}^{\infty} ۲^k a_{۲^k}$ همگرا باشد.

قضیهٔ ۲۶ ([۱، ص. ۵۳۱]) فرض کنید $R > ۰$ و برای هر $x \in (-R, R)$ سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ به $f(x)$ همگراست، یعنی:

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n = a_۰ + a_۱ x + a_۲ x^۲ + a_۳ x^۳ + \cdots$$

در این‌صورت f روی $(-R,R)$ مشتق‌پذیر است و برای هر $x \in (-R,R)$ داریم:

$$f'(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} na_n x^{n-۱} = a_۱ + ۲a_۲x + ۳a_۳x^۲ + \cdots$$

همچنین، برای هر $x \in (-R,R)$ داریم:

$$\int_{\circ}^{x} f(t)dt = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{a_n}{n+۱} x^{n+۱} = a_\circ x + \frac{a_۱}{۲}x^۲ + \frac{a_۲}{۳}x^۳ + \cdots$$

قضیهٔ ۲۷ ([۵، ص. ۵۵۲]) فرض کنید $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی مثبت با مشتق پیوسته باشد. در این‌صورت مساحت جسم حاصل از دوران منحنی $y=f(x)$، $a \le x \le b$ حول محور xها برابر است با:

$$S = \int_a^b ۲\pi f(x)\sqrt{۱+\left(f'(x)\right)^۲}dx.$$

تعریف. فرض کنید $I \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه باشد. تابع $f: I \to \mathbb{R}$ را **محدب** گویند هرگاه برای هر $x,y \in I$ و هر $t \in [\circ,۱]$ داشته باشیم،

$$f\left(tx+(۱-t)y\right) \le tf(x)+(۱-t)f(y).$$

اگر این نامساوی به‌جز در حالت‌های $t=\circ$، $t=۱$ و $x=y$ اکید باشد، آنگاه f را **اکیداً محدب** گویند.

قضیهٔ ۲۸ اگر $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی دو بار مشتق‌پذیر باشد و برای هر $x \in [a,b]$، $f''(x) \ge \circ$، آنگاه f تابعی محدب است. همچنین اگر برای هر $x \in [a,b]$، $f''(x) > \circ$، آنگاه f اکیداً محدب است.

اثبات. فرض کنید $a \le x < y \le b$ و $t \in (\circ,۱)$ و قرار دهید $z = tx+(۱-t)y$. بنابر قضیهٔ میانگین، $c_۱ \in (x,z)$ و $c_۲ \in (z,y)$ موجودند که

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(c_۱)\ ,\ \frac{f(y)-f(z)}{y-z} = f'(c_۲).$$

از سوی دیگر چون $f'' \ge \circ$، پس f' صعودی است و در نتیجه $f'(c_۱) \le f'(c_۲)$ یا

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(y)-f(z)}{y-z},$$

که با جای‌گذاری $tx + (1-t)y$ به جای z، نامساوی

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

را نتیجه می‌دهد.

توجه کنید که این نامساوی در حالت‌های $x = y$ یا $t = 0, 1$ نیز به‌وضوح برقرار است، در نتیجه f تابعی محدب است.

اگر برای هر $x \in [a, b]$، $f''(x) > 0$، آنگاه f' اکیداً صعودی است و در نتیجه،

$$f'(c_1) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} < \frac{f(y) - f(z)}{y - z} = f'(c_2),$$

که با جای‌گذاری $tx + (1-t)y$ به‌جای z، نامساوی

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y),$$

را به‌دست می‌دهد. از این‌رو اکیداً محدب‌بودن f نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۲۹ (نامساوی ینسن) فرض کنید I یک بازه و $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی محدب باشد. در این‌صورت برای هر $x_1, \ldots, x_n \in I$ و هر $t_1, \ldots, t_n \in [0, 1]$ که در شرط $t_1 + \cdots + t_n = 1$ صدق می‌کنند داریم:

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n).$$

همچنین اگر f اکیداً محدب باشد و برای هر i، $0 < t_i < 1$، آنگاه تنها حالت تساوی در این نامساوی هنگامی است که $x_1 = \cdots = x_n$.

اثبات. از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. برای $n = 1, 2$ حکم واضح است. فرض کنید $n \geq 3$ و حکم برای $n - 1$ برقرار باشد. درستی حکم را برای n تحقیق می‌کنیم. اگر برای iای داشته باشیم $t_i = 1$، آنگاه برای هر j که $j \neq i$، $t_j = 0$ و حکم به‌وضوح برقرار است. همچنین اگر برای iای داشته باشیم $t_i = 0$، حکم از فرض استقرا نتیجه می‌شود. پس فرض کنید برای هر i، $0 < t_i < 1$. داریم:

$$t_1x_1 + \cdots + t_nx_n = (1 - t_n)\left(\frac{t_1}{1 - t_n}x_1 + \cdots + \frac{t_{n-1}}{1 - t_n}x_{n-1}\right) + t_nx_n.$$

اکنون با استفاده از محدب‌بودن f و فرض استقرا و با توجه به تساوی $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{1-t_n} = 1$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} f(t_1x_1+\cdots+t_nx_n) &\leq (1-t_n)f\left(\frac{t_1}{1-t_n}x_1+\cdots+\frac{t_{n-1}}{1-t_n}x_{n-1}\right) \\ &\quad + t_nf(x_n), \\ &\leq (1-t_n)\left(\frac{t_1}{1-t_n}f(x_1)+\cdots+\frac{t_{n-1}}{1-t_n}f(x_{n-1})\right) \\ &\quad + t_nf(x_n) \\ &= t_1f(x_1)+\cdots+t_nf(x_n). \end{aligned}$$

و نامساوی ثابت می‌شود. چنانچه f اکیداً محدب باشد و این نامساوی به تساوی تبدیل شود، باید داشته باشیم،

$$f\left(\frac{t_1}{1-t_n}x_1+\cdots+\frac{t_{n-1}}{1-t_n}x_{n-1}\right) = \frac{t_1}{1-t_n}f(x_1)+\cdots+\frac{t_{n-1}}{1-t_n}f(x_{n-1}).$$

از این‌رو بنابر فرض استقرا، $x_1 = \cdots = x_{n-1}$. در نتیجه:

$$f((1-t_n)x_{n-1}+t_nx_n) = (1-t_n)f(x_{n-1})+t_nf(x_n),$$

که با توجه به اکیداً محدب‌بودن f نتیجه می‌دهد $x_{n-1} = x_n$ و اثبات کامل می‌شود.

قضیهٔ ۳۰. داریم، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

اثبات اول. تعریف کنید:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx,\ \ J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x\, dx.$$

به‌وضوح داریم:

$$I_0 = \frac{\pi}{2},\quad J_0 = \frac{\pi^3}{24}.$$

در I_n با در نظرگرفتن $dv = \cos x dx$ و استفاده از روش جزء به‌جزء می‌توان نوشت:

$$I_n = \frac{2n-1}{2n}I_{n-1}.$$

در J_n نخست با در نظرگرفتن $dv = \cos dx$ و به‌کار بردن روش جزءبه‌جزء و سپس با در نظرگرفتن $dv = \sin x \cos^{۲n-۱} x dx$ به‌دست می‌آوریم

$$I_n = n(۲n-۱)J_{n-۱} - ۲n^۲ J_n.$$

با تقسیم دو طرف این رابطه بر $n^۲ I_n$ خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{n^۲} = ۲\left(\frac{J_{n-۱}}{I_{n-۱}} - \frac{J_n}{I_n}\right).$$

با استفاده از مجموع تلسکوپی داریم:

$$\sum_{n=۱}^{N} \frac{۱}{n^۲} = ۲\left(\frac{J_۰}{I_۰} - \frac{J_N}{I_N}\right) = \frac{\pi^۲}{۶} - ۲\frac{J_N}{I_N}. \qquad (*)$$

چون برای $x \in \left[۰, \frac{\pi}{۲}\right]$ داریم $x \leq \frac{\pi}{۲}\sin x$، در نتیجه

$$\begin{aligned} ۰ \leq J_N &\leq \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\pi^۲}{۴} \sin^۲ x \cos^{۲N} x\, dx \\ &= \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\pi^۲}{۴} \cos^{۲N} x dx - \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\pi^۲}{۴} \cos^{۲(N+۱)} x\, dx \\ &= \frac{\pi^۲}{۴}(I_N - I_{N+۱}). \end{aligned}$$

اما $I_{N+۱} = \frac{۲N+۱}{۲N+۲} I_N$، بنابراین

$$I_N - I_{N+۱} = \frac{I_N}{۲N+۲},$$

پس

$$\frac{J_N}{I_N} \leq \frac{\pi^۲}{۴} \frac{۱}{۲N+۲},$$

و این نتیجه می‌دهد $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{J_N}{I_N} = ۰$. حال اگر در $(*)$، N را به بینهایت میل دهیم حکم نتیجه می‌شود.

اثبات دوم: داریم:

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^۲ x}$$