

به نام خدا

فهرست

نه	پیشگفتار برای مدرسان
پانزده	پیشگفتار برای دانشجویان
هفده	سپاسگزاری
۱	فصل ۱: فضاهای برداری
۲	۱. الف \mathbb{R}^n و \mathbb{C}^n
۵	لیست‌ها
۷	\mathbb{F}^n
۱۲	گریزی به هیأت‌ها
۱۲	تمرین ۱.۱ الف
۱۳	۱. ب. تعریف فضای برداری
۱۹	تمرین ۱.۱ ب
۲۰	۱. ج. زیرفضاها
۲۲	جمع زیرفضاها
۲۴	جمع مستقیم
۲۷	تمرین ۱.۱ ج
۳۱	فصل ۲: فضاهای برداری با بُعد متناهی
۳۲	۲. الف گسترده و استقلال خطی

۳۲	ترکیب خطی و گسترده
۳۷	استقلال خطی
۴۲	تمرین ۲.الف
۴۴	۲. ب پایه
۴۸	تمرین ۲.ب
۴۹	۲. ج بُعد
۵۴	تمرین ۲.ج
۵۷	فصل ۳: نگاشت‌های خطی
۵۸	۳. الف فضای برداری نگاشت‌های خطی
۵۸	تعریف و مثال‌هایی از نگاشت‌های خطی
۶۱	عمل‌های جبری روی $\mathcal{L}(V, W)$
۶۴	تمرین ۳.الف
۶۶	۳. ب فضاهای پوچ و بُردها
۶۶	فضای پوچ و یک به یکی
۶۹	بُرد و پوشایی
۷۱	قضیهٔ اساسی نگاشت‌های خطی
۷۵	تمرین ۳.ب
۷۹	۳. ج ماتریس‌ها
۷۹	نمایش نگاشت خطی با استفاده از ماتریس
۸۲	جمع و ضرب اسکالر ماتریس‌ها
۸۴	ضرب ماتریسی
۸۸	تمرین ۳.ج
۹۱	۳. د وارون‌پذیری و فضاهای برداری یکرخیخت
۹۱	نگاشت‌های خطی وارون‌پذیر
۹۳	فضاهای برداری یکرخیخت
۹۵	نگاشت‌های خطی از دیدگاه ضرب ماتریسی
۹۸	عملگرها
۱۰۰	تمرین ۳.د
۱۰۳	۳. ه حاصل ضرب و خارج قسمت فضاهای برداری

۱۰۳	حاصل ضرب فضاهای برداری
۱۰۵	حاصل ضرب‌ها و جمع‌های مستقیم
۱۰۶	خارج قسمت فضاهای برداری
۱۱۱	تمرین ۳.۳ هـ
۱۱۴	۳. و دوگانگی
۱۱۴	فضای دوگان و نگاشت دوگان
۱۱۸	فضای پوچ و برد دوگان نگاشت خطی
۱۲۳	ماتریس دوگان نگاشت خطی
۱۲۵	رتبه ماتریس
۱۲۷	تمرین ۳.۳ و
۱۳۳	فصل ۴: چند جمله‌ای‌ها
۱۳۴	مزدوج مختلط و قدرمطلق
۱۳۶	یکتایی ضرایب چند جمله‌ای‌ها
۱۳۷	الگوریتم تقسیم برای چند جمله‌ای‌ها
۱۳۸	صفرهای چند جمله‌ای‌ها
۱۴۰	تجزیه چند جمله‌ای‌ها روی C
۱۴۳	تجزیه چند جمله‌ای‌ها روی R
۱۴۶	تمرین ۴
۱۴۹	فصل ۵: مقادیر ویژه، بردارهای ویژه، و زیرفضاهای ناورد
۱۵۰	۵. الف زیرفضاهای ناورد
۱۵۱	مقادیر ویژه و بردارهای ویژه
۱۵۵	عملگرهای تحدید و خارج قسمت
۱۵۷	تمرین ۵.الف
۱۶۱	۵. ب بردارهای ویژه و ماتریس‌های بالامتثلی
۱۶۱	اثر دادن چند جمله‌ای‌ها بر عملگرها
۱۶۳	وجود مقادیر ویژه
۱۶۴	ماتریس‌های بالامتثلی
۱۷۲	تمرین ۵.ب

- ۱۷۴ ۵. ج فضا‌های ویژه و ماتریس‌های قطری
- ۱۸۱ تمرین ۵.ج
- ۱۸۳ فصل ۶: فضا‌های ضرب داخلی
- ۱۸۴ ۶. الف ضرب‌های داخلی و نُرم‌ها
- ۱۸۴ ضرب‌های داخلی
- ۱۸۹ نُرم‌ها
- ۱۹۶ تمرین ۶.الف
- ۲۰۱ ۶. ب پایه‌های متعامد یگانه
- ۲۰۹ تابع‌های خطی روی فضا‌های ضرب داخلی
- ۲۱۱ تمرین ۶.ب
- ۲۱۴ ۶. ج مکمل متعامد و مسألهٔ مینیمم‌سازی
- ۲۱۴ مکمل‌های متعامد
- ۲۲۰ مسأله‌های مینیمم‌سازی
- ۲۲۳ تمرین ۶.ج
- ۲۲۷ فصل ۷: عملگرهای روی فضا‌های ضرب داخلی
- ۲۲۸ ۷. الف عملگرهای خود-الحاق و نرمال
- ۲۲۸ نگاشت‌های الحاقی
- ۲۳۳ عملگرهای خود-الحاق
- ۲۳۷ عملگرهای نرمال
- ۲۴۰ تمرین ۷.الف
- ۲۴۳ ب.۷ قضیهٔ طیفی
- ۲۴۳ قضیهٔ طیفی مختلط
- ۲۴۵ قضیهٔ طیفی حقیقی
- ۲۵۰ تمرین ۷.ب
- ۲۵۲ ج.۷ عملگرهای مثبت و ایزومتري‌ها
- ۲۵۲ عملگرهای مثبت
- ۲۵۶ ایزومتري‌ها
- ۲۶۰ تمرین ۷.ج

۲۶۱	د.۷ تجزیه قطبی و تجزیه مقدار تکین
۲۶۱	تجزیه قطبی
۲۶۵	تجزیه مقدار تکین
۲۶۷	تمرین د.۷
۲۷۱	فصل ۸: عملگرهای روی فضاهاى بردارى مختلط
۲۷۲	الف.۸ بردارهای ویژه تعمیم یافته و عملگرهای پوچ توان
۲۷۲	فضای پوچ توان های عملگر
۲۷۴	بردارهای ویژه تعمیم یافته
۲۷۸	عملگرهای پوچ توان
۲۸۰	تمرین الف.۸
۲۸۲	ب.۸ تجزیه عملگر
۲۸۲	توصیف عملگرهای روی فضاهاى بردارى مختلط
۲۸۵	چندگانگی مقدار ویژه
۲۸۷	ماتریس های قطری بلوکی
۲۹۰	ریشه های دوم
۲۹۲	تمرین ب.۸
۲۹۳	ج.۸ چند جمله ای های مشخصه و مینیمال
۲۹۳	قضیه کیلی - همپلتون
۲۹۵	چند جمله ای مینیمال
۳۰۱	تمرین ج.۸
۳۰۳	د.۸ فرم ژوردان
۳۰۸	تمرین د.۸
۳۱۱	فصل ۹: عملگرهای روی فضاهاى بردارى حقیقی
۳۱۲	الف.۹ مختلط سازی
۳۱۲	مختلط سازی فضای برداری
۳۱۴	مختلط سازی عملگر
۳۱۵	چند جمله ای مینیمال در مختلط سازی
۳۱۶	مقادیر ویژه در مختلط سازی

۳۱۹	چندجمله‌ای مشخصه عملگر مختلط شده
۳۲۲	تمرین ۹.الف
۳۲۴	۹.ب عملگرهای روی فضاهاى ضرب داخلی حقیقی
۳۲۴	عملگرهای نرمال روی فضاهاى ضرب داخلی حقیقی
۳۳۰	ایزومتري‌ها روی فضاهاى ضرب داخلی حقیقی
۳۳۲	تمرین ۹.ب
۳۳۵	فصل ۱۰: رد و دترمینان
۳۳۶	۱۰.الف رد
۳۳۶	تعمیر پایه
۳۳۹	رد: پلی بین عملگرها و ماتریس‌ها
۳۴۵	تمرین ۱۰.الف
۳۴۸	۱۰.ب دترمینان
۳۴۸	دترمینان عملگر
۳۵۰	دترمینان ماتریس
۳۶۳	علامت دترمینان
۳۶۵	حجم
۳۷۴	تمرین ۱۰.ب
۳۷۷	فهرست نمادها
۳۷۹	نمایه

پیشگفتار برای مدرسان

شما در آستانه آموزش درسی هستید که احتمالاً دومین مواجهه دانشجویان با جبر خطی است. نخستین باری که دانشجویان شما با این درس سروکار داشته‌اند، احتمالاً با فضاهای اقلیدسی و ماتریس‌ها کار کرده‌اند. در عوض، این درس بر فضاهای برداری مجرد و نگاهت‌های خطی تکیه می‌کند.

تقریباً تمام کتاب‌های جبر خطی برای اثبات این که هر عملگر خطی روی فضای برداری مختلط با بُعد متناهی مقدار ویژه دارد، از دترمینان‌ها استفاده می‌کنند. کار با دترمینان‌ها مشکل و غیرشهودی است و معمولاً تعریف آن‌ها بدون ارائه دلیل و انگیزه بیان می‌شود. برای اثبات قضیه مربوط به وجود مقدار ویژه روی فضای برداری مختلط، بیشتر کتاب‌ها باید دترمینان را تعریف کنند و ثابت کنند نگاهت خطی وارون‌پذیر نیست اگر و فقط اگر دترمینان صفر شود، و آن وقت چندجمله‌ای مشخصه را تعریف کنند. این روش غیرمستقیم (زجرآور؟) به دانشجویان حس درستی از چرایی وجود مقادیر ویژه نمی‌دهد. در مقابل، اثبات ساده‌ای که بدون استفاده از دترمینان در این‌جا آورده شده، دید بیشتری می‌دهد (مثلاً ۲۱.۵ را ببینید). با انتقال دترمینان‌ها به انتهای کتاب، راه تازه‌ای به سمت هدف اصلی جبر خطی -- یعنی درک ساختار عملگرهای خطی -- باز می‌شود.

این کتاب موضوع را از ابتدا آغاز می‌کند، بدون هیچ پیش‌نیازی مگر همان انتظار معمول از پختگی مناسب در ریاضیات. حتی اگر دانشجویان شما مقداری از مطالب چند فصل نخست را پیش از این دیده باشند، احتمالاً با نوع تمرین‌هایی که در این‌جا آورده شده، که حل اغلب آن‌ها نیاز به درک اثبات‌ها دارد، ناآشنا هستند.

در این جا گزیده‌ای از مطالب اصلی کتاب را به صورت فصل به فصل می‌آوریم:

- فصل ۱: فضاهاى بردارى را در این فصل تعريف می‌کنیم و ویژگی‌های اساسی آن‌ها را بسط می‌دهیم.
- فصل ۲: استقلال خطی، گسترده و بُعد، که اساس نظریه فضاهاى بردارى با بُعد متناهی را شکل می‌دهند، تعريف می‌کنیم.
- فصل ۳: در این فصل نگاشت‌های خطی را معرفی می‌کنیم. قضیه کلیدی این فصل قضیه اساسی نگاشت‌های خطی (۲۲.۳) است: اگر T نگاشت خطی روی V باشد، آنگاه $\dim V = \dim \text{null } T + \dim \text{range } T$. در این فصل فضاهاى خارج‌قسمتی و مفهوم دوگان نسبت به بخش‌های دیگر کتاب انتزاعی‌ترند؛ می‌توانید بدون این که در جاهای دیگر کتاب به مشکلی برخورد کنید، این بخش را حذف کنید.
- فصل ۴: بخشی از نظریه چندجمله‌ای‌ها را که برای درک عملگرهای خطی لازم است، در این فصل می‌آوریم. در این فصل از جبر خطی خبری نیست. می‌توانید از آن به سرعت بگذرید، به‌ویژه اگر دانشجویان شما با این نتایج از قبل آشنا باشند.
- فصل ۵: ایده مطالعه عملگر خطی با تحدید آن به زیرفضاهای کوچک در بخش ابتدایی این فصل، ما را به مفهوم بردار ویژه می‌رساند. بخش اصلی این فصل، اثبات وجود مقدار ویژه روی فضاهاى بردارى مختلط است. سپس از این قضیه برای نشان دادن این که هر عملگر خطی روی فضای بردارى مختلط نسبت به پایه‌ای ماتریس بالا مثلثی دارد، استفاده می‌کنیم. تمام این‌ها را بدون تعريف دترمینان و چندجمله‌ای مشخصه انجام می‌دهیم!
- فصل ۶: در این فصل فضاهاى ضرب داخلی را تعريف می‌کنیم و ویژگی‌های اساسی آن‌ها را به همراه ابزارهای استاندارد مثل پایه‌های متعامد یکه و فرایند گرام - اشمیت بسط می‌دهیم. همچنین در این فصل نشان می‌دهیم که چگونه می‌توانیم از تصویرهای متعامد برای حل مسأله مشخصی در مینیمم‌سازی استفاده کنیم.
- فصل ۷: بخش اصلی این فصل، قضیه طیفی است که عملگرهای خطی‌ای را توصیف می‌کند که برای آن‌ها پایه متعامد یکه‌ای تشکیل شده از بردارهای ویژه وجود دارد. کارهایی که در فصل‌های قبل انجام می‌دهیم در این جا به بار می‌نشینند، به‌ویژه با اثبات‌های ساده‌ای که

به دست می‌دهند. همچنین این فصل به عملگرهای مثبت، ایزومتري‌ها، تجزیه قطبی و تجزیه مقدار تکین می‌پردازد.

- فصل ۸: در این فصل چندجمله‌ای مینیمال، چندجمله‌ای مشخصه و بردارهای ویژه تعمیم یافته را معرفی می‌کنیم. دستاورد اصلی این فصل، توصیف عملگر خطی روی فضاهای برداری مختلط با استفاده از بردارهای ویژه تعمیم یافته آن است. با استفاده از این توصیف می‌توانیم بسیاری از قضیه‌هایی را که به طور معمول با فرم ژوردان ثابت می‌شوند، اثبات کنیم. مثلاً، از این ابزارها برای اثبات این که هر عملگر خطی وارون‌پذیر روی فضای برداری مختلط ریشه دوم دارد، استفاده می‌کنیم. این فصل را با اثبات این قضیه به پایان می‌بریم که هر عملگر خطی روی فضای برداری مختلط را می‌توان با فرم ژوردان نمایش داد.

- فصل ۹: در این فصل عملگرهای خطی روی فضاهای برداری حقیقی در مرکز توجه هستند. در این جا تکنیک اصلی مختلط‌سازی است، که توسیع طبیعی عملگر خطی روی فضای برداری حقیقی به عملگری خطی روی فضای برداری مختلط است. مختلط‌سازی به ما این امکان را می‌دهد تا نتایج مربوط به فضاهای برداری مختلط را به آسانی به فضاهای برداری حقیقی انتقال دهیم. مثلاً، از این تکنیک برای اثبات این که هر عملگر خطی روی فضای برداری حقیقی زیرفضای ناوردایی از بُعد ۱ یا ۲ دارد، استفاده می‌کنیم. مثالی دیگر، اثبات این است که هر عملگر خطی روی فضای برداری حقیقی با بُعد فرد، مقدار ویژه دارد.

- فصل ۱۰: در این فصل رد و دترمینان را (روی فضاهای برداری مختلط) به صورت مجموع مقدارهای ویژه و حاصل ضرب مقدارهای ویژه، با احتساب چندگانگی، تعریف می‌کنیم. بیان این تعریف‌ها که به سادگی می‌توان آن‌ها را به خاطر سپرد با رویکرد مرسوم به مقدارهای ویژه ممکن نبود، چون روش مرسوم برای اثبات این که مقدارهای ویژه کافی وجود دارند، از دترمینان استفاده می‌کرد. اکنون قضیه‌های استاندارد در مورد دترمینان‌ها بسیار واضح تر می‌شوند. از تجزیه قطبی و قضیه طیفی حقیقی استفاده می‌کنیم تا رابطه تغییر متغیر برای انتگرال‌های چندمتغیره را طوری به دست آوریم که ظاهر شدن دترمینان، طبیعی به نظر برسد.

در این کتاب معمولاً جبر خطی را به طور هم‌زمان برای فضاهای برداری حقیقی و مختلط پیش می‌بریم و فرض می‌کنیم F نشان‌دهنده اعداد حقیقی یا مختلط باشد. اگر شما و دانشجوایانتان دوست دارید F را هیأتی دلخواه در نظر بگیرید، بهتر است نگاهی به نظرات انتهایی بخش ۸.۱ الف بیندازید. در این سطح، ترجیح من پرهیز از هیأت‌های دلخواه است، چون آن‌ها تنها بحث را انتزاعی‌تر می‌کنند بدون

این که مطلب تازه‌ای در جبر خطی به ما بیاموزند. همچنین، دانشجویان راحت‌ترند که به چندجمله‌ای‌ها به چشم تابع نگاه کنند تا این که آن‌ها را اشیای کلی‌تری در نظر بگیرند که در چندجمله‌ای‌های با ضرایب در هیأت متناهی می‌بینیم. حتی اگر در نهایت بخش آغازین نظریه را با هیأت‌های دلخواه پیش ببرید، فضاهای ضرب داخلی شما را وادار می‌کند که خود را به فضاهای برداری حقیقی و مختلط محدود کنید. احتمالاً نخواهید توانست همه کتاب را طی یک ترم تدریس کنید. هشت فصل آغازین، هدف خوبی برای درسی یک‌ترمی است. اگر حتماً باید به فصل ۱۰ برسید، آن وقت می‌توانید برای هر یک از فصل‌های ۴ و ۹ پانزده دقیقه زمان بگذارید، همین‌طور می‌توانید بخش فضاهای خارج‌قسمتی و مفهوم دوگان در فصل ۳ را حذف کنید.

هدفی که از آموزش هر قضیه خاصی مهم‌تر است، توانمند کردن دانشجویان به منظور فهمیدن و راحت کار کردن با اشیای جبر خطی است. ریاضیات را تنها با تمرین می‌توانید یاد بگیرید. خوشبختانه، در جبر خطی تمرین‌های خوب زیادی وجود دارد. هنگام آموزش این درس، معمولاً در هر جلسه تعدادی از مسائل را به‌عنوان تمرین برای دانشجویان مشخص می‌کنم تا در جلسه آینده تحویل دهند. بررسی تمرین‌ها به‌طور معمول یک‌سوم یا حتی نصف وقت کلاس را می‌گیرد.

تغییرات چشمگیر نسبت به ویرایش پیشین به شرح زیرند:

- در این ویرایش ۵۶۱ تمرین آمده است، که ۳۳۷ تا از آن‌ها تازه هستند که در ویرایش پیش نبودند.
- مثال‌های تازه زیادی افزوده شده‌اند تا ایده‌های کلیدی جبر خطی را بیان کنند.
- اکنون هر قضیه، نامی توصیفی دارد.
- موضوعات تازه کتاب شامل فضاهای ضرب داخلی، فضاهای خارج‌قسمتی و مفهوم دوگان می‌شوند.
- فصل ۹ (عملگرهای روی فضاهای برداری حقیقی) به‌طور کامل بازنویسی شده است تا بتوانیم از ساده‌سازی‌های مربوط به مختلط‌سازی استفاده کنیم. این رویکرد این امکان را به ما می‌دهد تا در فصل‌های ۵ و ۷ مطالب را ساده‌تر بیان کنیم، چون آن فصل‌ها اکنون بیشتر روی فضاهای برداری مختلط تمرکز دارند.
- در طول کتاب صدها مورد را تغییر داده و بهتر کرده‌ایم. مثلاً، اثبات فرم ژوردان (بخش ۸.۵) را ساده‌تر کرده‌ایم.

برای اطلاعات بیشتر در مورد کتاب لطفاً به وبسایت زیر مراجعه کنید. ممکن است گاه و بی‌گاه بخش‌های تازه‌ای در مورد سایر موضوعات بنویسم. بخش‌های تازه را در وبسایت می‌گذارم. پیشنهادها، نظرها، و اصلاحات شما را با کمال میل پذیرا هستم.

بهترین آرزوها برای آموزش موفقیت‌آمیز جبر خطی!

شلدون اکسلر

دانشکده ریاضی

دانشگاه ایالتی سان فرانسیسکو

ایالات متحده امریکا، کالیفرنیا، سان فرانسیسکو

وبسایت: linear.axler.net

ایمیل: linear@axler.net

توییتر: @AxlerLinear