فصل ۱

مقدمه

نظریه‌ی ابتداییِ مجموعه‌ها

با بحثی غیررسمی در موردِ بعضی مفاهیمِ پایه‌ایِ نظریه‌ی مجموعه‌ها شروع می‌کنیم. در این دورانِ "ریاضی جدید"، بیشتر این مطالب از قبل برای شما آشنا خواهد بود. در واقع، شروعِ هر درسی در ریاضیات با بحثی در نظریه‌ی مجموعه‌ها به روشی فراگیر تبدیل شده است، که حتی به مدارسِ ابتدایی هم گسترش یافته است. اما می‌خواهیم در اینجا نظریه‌ی مجموعه‌ها در سطحِ مدارسِ ابتدایی را مرور کنیم (و این کار را با نمادگذاری خودمان انجام دهیم). در طولِ این مسیر خواهیم توانست به بعضی مطالبی اشاره کنیم که بعداً برایمان مهم خواهد بود. در این بخش‌های اول، به‌طور ویژه‌ای دغدغه‌ی دقت نخواهیم داشت. کارِ جدی‌تر در فصل ۲ شروع خواهد شد.

هر مجموعه گردایه‌ای از چیزهاست (که عضوهای آن نامیده می‌شوند)، و گردایه به عنوانِ شیئی واحد تلقی می‌شود. می‌نویسیم "$t \in A$" تا این را بگوییم که t عضوی از A است و می‌نویسیم "$t \notin A$" تا این را بگوییم که t عضوی از A نیست.

برای مثال، مجموعه‌ای هست که اعضایش دقیقاً اعدادِ اولِ کوچک‌تر از ۱۰ هستند. این مجموعه چهار عضو دارد: اعدادِ ۲، ۳، ۵، و ۷. این مجموعه را می‌توان به نحوِ مناسبی با فهرست‌کردنِ اعضایش در درونِ آکولادها نام‌گذاری کرد:

$$\{۲, ۳, ۵, ۷\}.$$

این مجموعه را A بخوانید. و B را مجموعه‌ی همه‌ی ریشه‌های معادله‌ی چندجمله‌ایِ

$$x^۴ - ۱۷x^۳ + ۱۰۱x^۲ - ۲۴۷x + ۲۱۰ = ۰$$

بگیرید. حالا (چنان که خواننده‌ی کوشا می‌تواند تحقیق کند) معلوم می‌شود که مجموعه‌ی B دقیقاً همان چهار عضوِ ۲، ۳، ۵، و ۷ را دارد. به این دلیل A و B مجموعه‌ی واحدی هستند، یعنی $A = B$. مهم نیست که A و B به روش‌های متفاوتی تعریف شده‌اند. چون اعضایشان دقیقاً یکی است، مساوی هستند؛ یعنی مجموعه‌ی واحدی‌اند. می‌توانیم این اصلِ کلّی را صورت‌بندی کنیم:

اصلِ مصداقی‌بودن اگر دو مجموعه اعضایشان یکی باشند، آنگاه مساوی‌اند.

در اینجا و جاهای دیگر، با کمی به‌کارگیریِ علامت‌گذاریِ نمادی می‌توانیم مطالب را به نحوی موجزتر و با ابهامِ کمتری بیان کنیم. هم‌چنین عبارتِ "اگر و فقط اگر" را به شکلِ "اگرر" خلاصه می‌کنیم، به این ترتیب این بیان مجدد را داریم:

اصلِ مصداقی‌بودن اگر A و B مجموعه‌هایی باشند که به ازای هر شیءِ t،

$$t \in A \quad \text{اگرر} \quad t \in B،$$

آنگاه $A = B$.

برای مثال، مجموعه‌ی اعدادِ اولِ کوچک‌تر از ۱۰ همان مجموعه‌ی ریشه‌های معادله‌ی $x^۴ - ۱۷x^۳ + ۱۰۱x^۲ - ۲۴۷x + ۲۱۰ = ۰$ است. و مجموعه‌ی $\{۲\}$ که تنها عضوش عددِ ۲ است همان مجموعه‌ی اعدادِ اولِ زوج است.

در ضمن، می‌نویسیم "$A = B$" تا این معنا را برسانیم که A و B شیء واحدی‌اند. یعنی عبارتِ "A" در سمتِ چپِ نمادِ برابریْ همان شیئی را نام‌گذاری می‌کند که عبارتِ "B" در سمتِ راست. اگر $A = B$، آنگاه خودبه‌خود (یعنی به واسطه‌ی منطق) هر چه درباره‌ی شیء A درست باشد در موردِ شیء B هم درست است (چون همان شیء است). برای مثال، اگر $A = B$، آنگاه این خودبه‌خود درست است که به ازای هر شیء t، $t \in A$ اگرر $t \in B$. (این عکسِ اصلِ مصداقی‌بودن است.) طبقِ معمول، می‌نویسیم "$A \neq B$" تا این معنا را برسانیم که این درست نیست که $A = B$.

یک مجموعه‌ی کوچکْ مجموعه‌ی $\{۰\}$ای خواهد بود که فقط یک عضو دارد، که عددِ ۰ است. مجموعه‌ای حتی کوچک‌تر مجموعه‌ی تهی، $\varnothing$، است. مجموعه‌ی $\varnothing$ اصلاً هیچ عضوی ندارد. به‌علاوه، این یگانه مجموعه‌ی بدونِ عضو است، چون مصداقی‌بودنْ به ما می‌گوید که هر دو چنین مجموعه‌ای باید یکی باشند. شاید در ابتدا تصور شود که مجموعه‌ی تهی مجموعه‌ای است که ذکرش کمابیش بی‌فایده یا حتی بی‌معناست، اما، در واقع، با استفاده از عمل‌های نظریه‌ی مجموعه‌ها آرایه‌ی حیرت‌انگیزی از مجموعه‌ها بر مبنای مجموعه‌ی تهی ساخته خواهد شد.

به ازای همه‌ی اشیاءِ x و y، می‌توانیم مجموعه‌ی زوجِ $\{x, y\}$ را تشکیل دهیم که فقط عضوهای x و y را دارد. ملاحظه کنید که $\{x, y\} = \{y, x\}$، چرا که این دو مجموعه دقیقاً اعضای واحدی دارند. به عنوانِ حالتی خاص (وقتی $x = y$) این را داریم که مجموعه‌ی $\{x, x\}$ برابر است با $\{x\}$.

برای مثال، می‌توانیم مجموعه‌ی $\{\varnothing\}$ را تشکیل دهیم که تنها عضوش $\varnothing$ است. توجه کنید که $\varnothing \neq \{\varnothing\}$، چون $\varnothing \in \{\varnothing\}$ اما $\varnothing \notin \varnothing$. این امر که $\varnothing \neq \{\varnothing\}$ در این امر بازتاب می‌یابد که شخصی با ظرفی خالی وضع‌اش بهتر است از شخصی بدونِ هیچ چیز ــ اولی دست‌کم ظرف را دارد. هم‌چنین می‌توانیم $\{\{\varnothing\}\}$، $\{\{\{\varnothing\}\}\}$ و غیره، را تشکیل بدهیم، که همگی متمایزند (تمرین ۲).

مشابهاً به ازای همه‌ی اشیاءِ x، y، و z می‌توانیم مجموعه‌ی $\{x, y, z\}$ را تشکیل دهیم. به صورتی کلّی‌تر، مجموعه‌ی $\{x_{۱}, \cdots, x_n\}$ را داریم که اعضایش دقیقاً اشیاءِ $x_{۱}$، ...، x_n هستند. برای مثال،

$$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$$

مجموعه‌ای سه‌عضوی است.

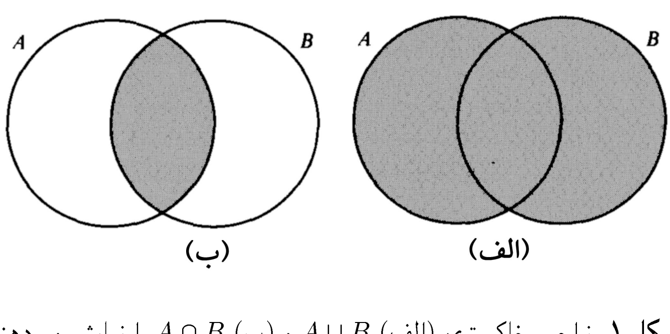
دو عملِ آشنای دیگر بر مجموعه‌ها اجتماع و اشتراک هستند. اجتماعِ مجموعه‌های A و B مجموعه‌ی $A \cup B$ از همه‌ی چیزهایی است که عضوِ A یا B (یا هر دو) هستند. مشابهاً اشتراک A و B مجموعه‌ی $A \cap B$ از همه‌ی چیزهایی است که عضو هر دوی A و B هستند. برای مثال،

$$\{x, y\} \cup \{z\} = \{x, y, z\}$$

و

$$\{۲, ۳, ۵, ۷\} \cap \{۱, ۲, ۳, ۴\} = \{۲, ۳\}.$$

شکل ۱ تصاویر معمولِ نشان‌دهنده‌ی این عمل‌ها را به‌دست می‌دهد. مجموعه‌های A و B را مجزا می‌گویند وقتی عضوِ مشترکی نداشته باشند، یعنی وقتی $A \cap B = \varnothing$.



شکل ۱. نواحیِ خاکستری (الف) $A \cup B$ و (ب) $A \cap B$ را نمایش می‌دهند.

مجموعه‌ی A را زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی B می‌گویند (و می‌نویسند $A \subseteq B$) اگر همه‌ی اعضای A عضوِ B هم باشند. توجه کنید که هر مجموعه زیرمجموعه‌ای از خودش است. در انتهای دیگرِ طیف، $\varnothing$ زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است. این امر (که به ازای هر A، $\varnothing \subseteq A$) "به انتفاءِ مقدم" درست است، زیرا وظیفه‌ی تحقیقِ اینکه، به ازای هر عضوِ $\varnothing$، آن عضو به A هم تعلق دارد اصلاً محتاجِ هیچ کاری نیست.

اگر $A \subseteq B$، آنگاه می‌توانیم این را هم بگوییم که A مشمول در B است یا B شاملِ A است. رابطه‌ی شمول ($\subseteq$) را نباید با رابطه‌ی عضویتِ ($\in$) خلط کرد. اگر بخواهیم بدانیم که آیا $A \in B$ یا نه، A را به عنوانِ شیئی واحد در نظر می‌گیریم، و بررسی می‌کنیم که آیا این شیء واحد در بینِ اعضای B هست یا نه. در مقابل، اگر بخواهیم بدانیم که آیا $A \subseteq B$ یا نه، آنگاه باید مجموعه‌ی A را بگشاییم، اعضای مختلف‌اش را نگاه کنیم، و بررسی کنیم که آیا اعضای مختلف‌اش را می‌توان در بینِ اعضای B یافت یا نه.

مثال‌ها

۱. $\varnothing \subseteq \varnothing$، اما $\varnothing \notin \varnothing$.

۲. $\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$ اما $\{\varnothing\} \not\subseteq \{\{\varnothing\}\}$. $\{\varnothing\}$ زیرمجموعه‌ای از $\{\{\varnothing\}\}$ نیست، زیرا عضوی از $\{\varnothing\}$ هست، یعنی $\varnothing$، که عضوی از $\{\{\varnothing\}\}$ نیست.

۳. Us را مجموعه‌ی همه‌ی مردمِ ایالاتِ متحده بگیرید، و Un را مجموعه‌ی همه‌ی کشورهای متعلق به سازمانِ مللِ متحد بگیرید. در این صورت

$$\text{جان جونز} \in Us \ \in \ Un.$$

اما جان جونز عضوِ Un نیست (چون او حتی کشور هم نیست)، و لذا $Us \not\subseteq Un$.

هر مجموعه‌ی A یک یا چند زیرمجموعه خواهد داشت. (در واقع، اگر A تعدادِ n عضو داشته باشد، آنگاه A تعدادِ 2^n زیرمجموعه دارد. اما این مطلبی است که مدت‌ها بعد به آن خواهیم پرداخت.) پس مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های A را داریم، که مجموعه‌ی توانی[1] A یا $\mathscr{P}A$ خوانده می‌شود. برای مثال،

$$\mathscr{P}\varnothing = \{\varnothing\},$$
$$\mathscr{P}\{\varnothing\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\},$$
$$\mathscr{P}\{0, 1\} = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}.$$

۱. دلایل استفاده از واژه‌ی "توانی" در این سیاق چندان متقاعدکننده نیست، اما این کاربرد در حال حاضر کاملاً جاافتاده است.

راهِ بسیار انعطاف‌پذیری برای نام‌گذاریِ مجموعه‌ها روشِ تجرید است. در این روش، مجموعه را با عرضه‌ی شرطی ــشرطِ ورود ــ مشخص می‌کنیم که هر شیء برای تعلق داشتن به مجموعه باید در آن شرط صدق کند. به این ترتیب، مجموعه‌ی همه‌ی اشیاءِ xای را به‌دست می‌آوریم که x شرطِ وجود را برآورده می‌کند. نمادگذاریِ موردِ استفاده برای مجموعه‌ی همه‌ی اشیاءِ xای که شرطِ ــx ــ برقرار است این است:

$$\{x \mid \text{\_\_}\ x\text{\_\_}\}.$$

برای مثال:

۱. $\mathscr{P}A$ مجموعه‌ی همه‌ی اشیاءِ xای است که x زیرمجموعه‌ای از A است. در اینجا "x زیرمجموعه‌ای از A است" شرطِ ورودی‌ای است که x باید در آن صدق کند تا به $\mathscr{P}A$ تعلق داشته باشد. می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}\mathscr{P}A &= \{x \mid \text{است } A \text{ زیرمجموعه‌ای از } x\}\\ &= \{x \mid x \subseteq A\}.\end{aligned}$$

۲. $A \cap B$ مجموعه‌ی همه‌ی اشیاءِ yای است که $y \in A$ و $y \in B$. می‌توانیم بنویسیم

$$A \cap B = \{y \mid y \in B \text{ و } y \in A\}.$$

در اینجا مهم نیست که از "x" یا "y" یا حرفِ دیگری برای نماد (که به عنوانِ ضمیر به‌کار می‌رود) استفاده کنیم.

۳. مجموعه‌ی $\{z \mid z \neq z\}$ برابرِ $\varnothing$ است، زیرا هیچ شیء zای در شرطِ ورودِ "$z \neq z$" صدق نمی‌کند.

۴. مجموعه‌ی $\{n \mid$ یک عددِ اولِ زوج است $n\}$ همان مجموعه‌ی $\{۲\}$ است.

با این حال، در شیوه‌ی تجرید خطراتِ ذاتی‌ای هست. به ازای بعضی انتخاب‌های عجیب و غریب برای شرطِ ورود، ممکن است این طور اتفاق بیفتد که هیچ مجموعه‌ای نباشد که دقیقاً حاویِ آن اشیایی باشد که شرطِ ورود را برآورده می‌کنند. برای وقوعِ فاجعه دو راه هست.

یک فاجعه‌ی بالقوه را این نشان می‌دهد:

$$\{x \mid \text{عددِ صحیحِ مثبتی است که در یک سطرِ تایپیْ تعریف‌پذیر است } x\}.$$

واژه‌ی دردسرساز در اینجا "تعریف‌پذیر" است. تعریفِ بعضی اعداد در یک سطرْ آسان است. برای مثال، هر یک از سطرهای زیر برای تعریفِ عددِ صحیحِ مثبتی به‌کار می‌آید:

$12,317$،
یک میلیون‌اُمین عددِ اول،
کوچک‌ترین عددی به شکلِ $2^{2^n} + 1$ که اول نیست،
۲۳اُمین عددِ کامل[1].

توجه کنید که فقط تعدادی متناهی سطرِ ممکنِ تایپی وجود دارد (زیرا فقط تعدادی متناهی نماد در اختیار چاپخانه است، و محدودیتی هست برای اینکه چند نماد در یک سطر جا می‌شود). نتیجتاً

$$\{x \mid \text{است تعریف‌پذیر تایپی سطرِ یک در که است مثبتی صحیحِ عددِ } x\}$$

صرفاً مجموعه‌ای متناهی از اعدادِ صحیحِ مثبت است. کوچک‌ترین عددِ صحیحِ مثبتی را در نظر بگیرید که در این مجموعه نباشد؛ یعنی

کوچک‌ترین عددِ صحیحِ مثبتی که در یک سطرِ تایپی تعریف‌پذیر نیست

را در نظر بگیرید. سطرِ پیشینْ عددِ صحیحِ مثبتی را در یک سطر تعریف می‌کند، اما آن عدد، بنا به نحوه‌ی ساخت‌اش، در یک سطرْ تعریف‌پذیر نیست! پس دچار مشکل شده‌ایم و برای این مشکل می‌توان شرطِ ورودِ مجموعه را متهم کرد، یعنی این عبارت را: "عددِ صحیحِ مثبتی است که در یک سطرِ تایپی تعریف‌پذیر است". این عبارت اگرچه شاید در ابتدا یک شرط با معنای ورود به نظر رسیده باشد، حالا به نظر می‌آید که به‌شدت معیوب است. (این مثال را جی. جی. بِری در ۱۹۰۶ به‌دست داده است. مثالِ مرتبطی را ژول ریشارد در ۱۹۰۵ منتشر کرده بود.)

فاجعه‌ی دومی هست که می‌تواند از استفاده‌ی بسیار آزادانه از روشِ تجرید حاصل شود. مثالی از این وضعیت را

$$\{x \mid x \notin x\}$$

به‌دست می‌دهد، که مجموعه‌ی همه‌ی اشیایی است که عضوِ خودشان نیستند. این مجموعه را A بخوانید، و بپرسید "آیا A عضوِ خودش است؟" اگر $A \notin A$، آنگاه A شرطِ ورود برای A را برآورده

۱. عددِ صحیحِ مثبتْ کامل است اگر برابر مجموعِ مقسوم‌علیه‌های کوچک‌ترش باشد، مثلاً $6 = 1 + 2 + 3$. ناقص (یا فراوان) است اگر مجموعِ مقسوم‌علیه‌های کوچک‌ترش کمتر از (یا، به‌ترتیب، بزرگ‌تر از) خودِ عدد باشد. این اصطلاحاتْ از بقایای عدد بینی است، یعنی بررسیِ رازآمیزِ معنای اعداد. نخستین چهار عددِ کامل عبارت‌اند از ۶، ۲۸، ۴۹۶ و ۸۱۲۸.