

قاعده‌ی بالا) $180 = 2 \times 90$ رقم هم برای شماره‌گذاری این صفحه‌ها داریم. اما تعداد عددهای سه‌رقمی 900 تا است که اگر همه‌ی آن‌ها در شماره‌گذاری ظاهر شوند، به تعداد $2700 = 3 \times 900$ رقم اضافه می‌شود که حاصل از 1395 بزرگ‌تر خواهد شد. بنابراین همه‌ی عددهای سه‌رقمی ظاهر نشده‌اند. فرض کنید تعداد عددهای سه‌رقمی ظاهر شده x باشد. در این صورت داریم:

$$9 \times 1 + 90 \times 2 + 3 \times x = 1395 \Rightarrow x = 402$$

پس این کتاب ۹ صفحه‌ی یک‌رقمی، ۹۰ صفحه‌ی دو‌رقمی و ۴۰۲ صفحه‌ی سه‌رقمی دارد. بنابراین این کتاب $9 + 90 + 402 = 501$ صفحه دارد.



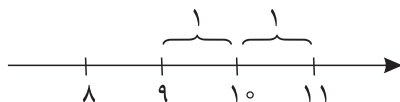
مسئله‌ی زیر در آزمون کانگوروی سال ۲۰۰۹ آمده بود.

مسئله‌ی ۳

چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد که فاصله‌ی \sqrt{n} تا 10 از 1 کم‌تر باشد؟

الف) ۱۹ (ب) ۲۰ (ج) ۳۸ (د) ۳۹ (ه) ۴۰

راه‌حل: همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید \sqrt{n} باید بین ۹ و ۱۱ باشد.



یعنی $9 < \sqrt{n} < 11$. با توجه به مثبت بودن عددها، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم: $81 < n < 121$. پس تعداد این عددها برابر است با $121 - 81 - 1 = 39$. پس گزینه‌ی «د» درست است.



مسئله‌ی ۴

در قرن بیستم (سال ۱۹۰۱ تا ۲۰۰۰ میلادی) چند سال بر ۶ بخش پذیر است؟

الف) ۱۵ (ب) ۱۶ (ج) ۱۷ (د) ۲۴ (ه) ۹۶

(آفریقای جنوبی - ۱۹۹۹)

راه‌حل: عددهای بخش‌پذیر بر ۶ به صورت $6k$ هستند، بنابراین:

$$1901 \leq 6k \leq 2000 \Rightarrow 316,8 \leq k \leq 333,3$$

از آنجا که k عدد صحیح است، پس

$$317 \leq k \leq 333 \Rightarrow 333 - 317 + 1 = 17$$

پس گزینه‌ی «ج» درست است.



مسئله‌ی بعد در المپیاد ریاضی ایران سال ۱۳۸۲ آمده بود.

مسئله‌ی ۵

علی‌مردان خان قرار است به عنوان تنبیه از ۱ تا ۲۰۰۰ را بنویسد! عباس‌قلی‌خان (پدر وی) ساعت ۲ بعد از ظهر سری به او می‌زند و می‌بیند که تا ۶۹ را نوشته است. پس از ۵ دقیقه دوباره به او سر می‌زند و مشاهده می‌کند که به ۱۷۹ رسیده است. تقریباً چه وقت تکلیف علی‌مردان خان تمام می‌شود؟ (فرض کنید نوشتن هر رقم زمان ثابتی طول می‌کشد.)



الف) ۳:۲۲ ب) ۳:۵۲ ج) ۲:۳۲ د) ۴:۰۰ ه) ۴:۳۱

راه‌حل: نخست تعداد رقم‌های بین ۶۹ تا ۱۷۹ را حساب می‌کنیم: $69 < x \leq 179$. تعداد عددهای دو رقمی $69 < x \leq 99$ برابر است با $99 - 69 = 30$ و تعداد عددهای سه رقمی $100 \leq x \leq 179$ برابر است با $179 - 100 + 1 = 80$. پس تعداد رقم‌های نوشته‌شده در ۵ دقیقه برابر است با $30 \times 2 + 80 \times 3 = 300$. پس در هر دقیقه $\frac{300}{5} = 60$ رقم نوشته می‌شود.







اکنون تعداد کل رقم‌های بین ۶۹ تا ۲۰۰۰ را حساب می‌کنیم.

$$\text{رقم } ۶۷۶۴ = ۱۰۰۱ \times ۴ + ۹۰۰ \times ۳ + ۳۰ \times ۲$$



پس از ساعت ۲، علی‌مردان خان باید ۶۷۶۴ رقم بنویسد و چون در هر دقیقه ۶۰ رقم می‌نویسد، بنابراین $\frac{۶۷۶۴}{۶۰} \cong ۱۱۲$ دقیقه طول می‌کشد تا تکلیفش تمام شود؛ یعنی ۱ ساعت و ۵۲ دقیقه. بنابراین تکلیفش ساعت ۳ : ۵۲ دقیقه تمام می‌شود. پس گزینه‌ی «ب» درست است.





تمرین‌ها

۱. مجموعه‌ی $\{1395, 1396, \dots, 2016\}$ چند عضو دارد؟ چندتا از عضوهای آن زوج هستند؟ 
۲. کتابی ۳۶۴ صفحه دارد. برای شماره‌گذاری صفحه‌های آن چند رقم به‌کار رفته است؟ 
۳. چند عدد مضرب ۶ در مجموعه‌ی $\{1000, 1001, \dots, 2000\}$ وجود دارد؟ 
۴. چند عدد طبیعی زوج در رابطه‌ی $1000 < n^2 < 2000$ صدق می‌کند؟
الف) ۱۳ ب) ۱۲ ج) ۷ د) ۶ 
۵. مجموعه‌ی $\{a, a+1, \dots, 200\}$ ، ۸۳ عضو دارد. a چه عددی است؟ 
۶. چند عدد مربع کامل در مجموعه‌ی $\{x \mid x \in \mathbb{N}, 9^3 < x < 4^7\}$ وجود دارد؟
الف) ۹۹ عدد ب) ۱۰۰ عدد ج) ۱۰۱ عدد د) ۱۰۲ عدد 



(انرژی اتمی - ۱۳۷۸)

۷. هنگام شمارش عددهای طبیعی به‌ترتیب از ۳ تا ۲۰۱، عدد ۵۳ پنجاه و یکمین عددی است که شمرده می‌شود. اگر این عددهای طبیعی را برعکس از ۲۰۱ به ۳ بشماریم، عدد ۵۳ چندمین عدد خواهد بود؟ 
- الف) ۱۴۷ ب) ۱۴۸ ج) ۱۴۹ د) ۱۵۰ 

(انرژی اتمی - ۱۳۹۲)

۸. کتابی کم‌تر از ۱۰۰۰ صفحه دارد. صفحه‌های کتاب را با شروع از ۱ شماره‌گذاری کرده‌ایم. تعداد رقم‌های به‌کار رفته دو برابر تعداد صفحه‌هاست. این کتاب چند صفحه دارد؟ 
- الف) ۱۰۳ ب) ۱۰۴ ج) ۱۰۶ د) ۱۰۸ 

(آزمون ربوکاپ - ۱۳۸۸)

۹. در چاپخانه‌ای، یک حروفچین از ۱ شروع می‌کند و عددهای طبیعی را دنبال هم می‌چیند. او برای عددهای دورقمی ابتدا رقم یکان و سپس رقم دهگان را می‌گذارد. او در مرحله‌ی یک‌صد و چهل و چهارم، چه رقمی از کدام عدد را می‌چیند؟ 
- الف) ۷ از عدد ۷۶ ب) ۶ از عدد ۷۶ ج) ۷ از عدد ۷۷ د) ۶ از عدد ۶۶ 

(انرژی اتمی - ۱۳۷۶)