۲. چه شش‌ضلعی‌هایی می‌توان ساخت که شش وجه داشته باشند و هیچ‌کدام چهارضلعی نباشند؟
۳. با متوازی‌الاضلاع‌ها چه شکل‌های شش‌وجهی‌ای را می‌توانید بسازید؟
۴. از مربع‌ها چه اجسامی می‌توانید بسازید که شش وجه ندارند؟
۵. چگونه می‌توان همهٔ سؤال‌های بالا را با جایگزین‌کردن پنج به‌جای شش، بازسازی کرد؟
۶. با مثلث‌های متساوی‌الاضلاع چه اجسامی می‌توانید بسازید؟

با شروع از یک مسئلهٔ تقریباً محدود، یعنی چه تعداد الگوی مربعی وجود دارد که با تاشدن به مکعب تبدیل شوند، دامنهٔ بررسی‌ها را به‌طور قابل‌توجهی گسترش داده‌ایم.

۷.۲.۵ اعداد اول[1]

مفهوم عدد اول مفهومی مهم در نظریهٔ اعداد است. به‌خاطر بیاورید که یک عدد اول است، هرگاه دقیقاً دو مقسوم‌علیه مختلف داشته باشد. بنابراین ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱ چند عدد اول در مجموعهٔ اعداد طبیعی هستند. اعداد اول تاریخچه‌ای با قدمت زیاد دارد. بیش از ۲۰۰۰ سال پیش، اقلیدس سؤالی دربارهٔ تعداد اعداد اول مطرح کرد و ثابت کرد که تعداد آن‌ها نامتناهی است — اثبات او در عین اختصار، یکی از اثبات‌های زیبای تمام ریاضیات است.

دانستن اینکه به تعداد نامتناهی عدد اول وجود دارد، بلافاصله بررسی امکان وجود فرمولی ساده برای تولید اعداد اول را برایمان جذاب می‌کند.

ریاضی‌دانان زمان زیادی را به یافتن چنین فرمولی اختصاص داده‌اند. در قرن‌های ۱۶ تا ۱۸ میلادی مردان بااستعدادی چون مرسن، فرما و اویلر فرمول‌های سادهٔ جالبی (مثل $۲^{(۲^n)}+۱$ و $n^۲+n+۴۱$) ساختند که به‌ظاهر اعداد اول را تولید می‌کردند. اما هر یک از آن‌ها در مراحل خاصی شکست خوردند. در سال ۱۹۴۷ میلادی، میلز فرمولی ساخت و ثابت کرد همواره عدد اول تولید می‌کند. او نشان داد که $[a^{۳^n}]$ برای یک ثابت a و به‌ازای هر عدد طبیعی این کار را می‌کند.[2] همان‌طورکه انتظار داشتید، «جوک» داستان این است که کسی نمی‌داند مقدار a چیست، تنها می‌دانیم چنین aای باید موجود باشد. یکی از مسائل حل نشده و جالب را گلدباخ در اوایل قرن ۱۸ بیان کرده است. او به یک حدس رسید که

1. Stephen I. Brown, "Of 'Prime' Concern: What Domain," *Mathematics Teacher*, 58(**5**),1965, pp. 402-407; "Prime' Pedagogical Schemes," *American Mathematical Monthly*, 75(**6**), 1968, pp. 660-664.

بعضی از ایده‌های این مقاله‌ها در مرجع زیر آمده است:

Some Prime Comparisons (Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1978, third printing, 1991).

۲. $[x]$ بزرگ‌ترین عدد صحیح کم‌تر یا مساوی x است، بنابراین $۳ = [۳/۷]$.

هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به‌صورت جمع دو عدد اول نوشت. بنابراین:

$$۴ = ۲ + ۲$$

$$۶ = ۳ + ۳$$

$$۱۲ = ۷ + ۵$$

$$۱۸ = ۷ + ۱۱$$

در یک بازهٔ زمانی بیش از ۲۵۰ ساله، کسی نتوانسته است حدس او را ثابت یا رد کند، اگرچه پیشرفت‌های جالب (و گاهی خنده‌دار) روی این سؤال صورت گرفته است.

ویژگی‌های زیادی در مورد اعداد اول وجود دارد که اسرارآمیزی حدس گلدباخ یا ویژگی وسوسه‌انگیزی فرمول میلز را ندارند. حتی دانش‌آموزان دبستانی این را که هر عدد غیراول را می‌توان به طور منحصربه‌فردی به‌صورت حاصل‌ضرب اعداد اول نوشت، به راحتی درک می‌کنند. بنابراین، ۶۳۰ را می‌توان به‌صورت $۷ \times ۵ \times ۳ \times ۳ \times ۲$ نوشت و هیچ عدد اول دیگری نمی‌تواند مقسوم‌علیه ۶۳۰ باشد. نه‌تنها جوان‌ترها این نتیجه را باور دارند، بلکه این موضوع را می‌توانند به‌راحتی ثابت کنند. نکتهٔ باارزش در همهٔ بحث‌های مطرح شده تا اینجا این است که در تجزیه تحلیل ما که ممکن است ساده، پیچیده، شگفت‌انگیز یا قابل انتظار باشد، در مورد مجموعهٔ خاص در حال بررسی یک فرض مهم را قبول کرده‌ایم. در بررسی نظریهٔ اعداد به‌طور کلی و در بررسی نظریهٔ اعداد اول به‌طور خاص، فرض می‌کنیم مجموعهٔ مورد بررسی، N یعنی مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت است.

با شفاف‌سازی این فرض، احتمال به چالش‌کشیدن ویژگی‌ها در قالب «اگر نه، چه؟» را افزایش می‌دهیم. به‌عنوان مثال، فرض کنید به‌جای $N = \{۱, ۲, ۳, \cdots\}$، مجموعهٔ $E = \{۱, ۲, ۴, ۶, \cdots\}$ را انتخاب کنیم که E مجموعهٔ اعداد زوج به‌همراه عدد ۱ است. در این سیستم جدید، عمل‌هایی نظیر جمع وجود دارند که بسته نیستند (یعنی وقتی اعضای مجموعه را جمع می‌کنیم، ممکن است دیگر حاصل‌جمع در مجموعه قرار نداشته باشد). گرچه، سایر عمل‌ها بسته‌اند. برای مثال وقتی دو عضو از اعضای E را در هم ضرب می‌کنیم، حاصل‌ضرب عددی در E است. چون E تحت ضرب بسته است، تلاش برای توسعهٔ مفهوم عدد اول در اینجا نیز معنی‌دار است. توجه کنید که اگر از همان تعریف عدد اول در N روی E استفاده کنیم، ۶ در E اول است، زیرا ۶ در E تنها دو مقسوم‌علیه دارد. مشابه اینکه ۲ در N مقسوم‌علیه ۵ نیست، ۲ در E مقسوم‌علیه ۶ نیست! به‌خاطر داشته باشید اگرچه در N داریم $۶ = ۳ \times ۲$، ۳ عضوی از E نیست. بهتر است اعداد اول دیگری را در E بیابید تا نظم اعداد اول در E شما را غافلگیر کند!

با تغییر تمرکز از N به E، در اینجا ۳ نقطهٔ شروع وجود دارد (دوباره نکات شگفت‌انگیز بسیاری را خواهید یافت):

۱. بعد از تعریف عدد زوج در E، حدس گلدباخ را در این دستگاه بازسازی کنید.

۲. می‌دانیم در N هر عدد (بزرگ‌تر از ۱) یا اول است یا می‌تواند به‌طور منحصربه‌فردی به‌صورت حاصل‌ضرب اعداد اول نوشته شود. به چند عدد غیراول E (با در نظر گرفتن ۷۲ به‌عنوان نقطهٔ شروع) نگاه کنید و ببینید در این حالت چه چیزی رخ می‌دهد. به یاد داشته باشید که ۵ × ۲ یک تجزیه به عوامل مجاز در E نیست، زیرا ۵ متعلق به E نیست.

۳. مارپیچ اولام

اولام، همکار سابق آینشتاین ، مشغول بازی تصویرسازی بود که دید اگر اعداد طبیعی را به‌صورت مارپیچی بنویسد، همان‌طور که در شکل ۱۳.۵ نشان داده شده است، بعضی قطرها از نظر داشتن تعداد اعداد اول، غنی‌اند و بعضی دیگر از این نظر فقیر و به‌علاوه هیچ قطری تنها متشکل از اعداد اول وجود ندارد.[1]

بنابراین، قطر با اعداد ۷۳، ۴۳، ۲۱، ۷، ۱، ۳، ۱۳، ۳۱، ۵۷، ۹۱ یک نسبت بزرگی از اعداد اول دارد. این قطر را با اعداد روی قطر ۶۹، ۳۹، ۱۷، ۳۵، ۶۱، ۹۵ مقایسه کنید. حال الگوی مارپیچی مشابهی را در نظر بگیرید و جاهای خالی را تنها با اعضای E پر کنید. ماهیت اعداد اول روی قطرها را در این حالت نیز بررسی کنید.

اگر بررسی جایگزین‌های حاصل از به‌کارگیری راهبرد «اگر نه، چه؟» را در دنیای E شروع کنید، به مسائل حل نشده‌ای (حل نشده برای قرن‌ها) در N برمی‌خورید که جواب‌های آن‌قدر ساده‌ای در E دارند که حتی یک دانش‌آموز باهوش سال سوم دبیرستان نیز می‌تواند آن‌ها را به‌دست آورد. برای مثال، این مورد برای حدس گلدباخ که بررسی کردیم، صادق است. اگر همان تعریف عدد زوج در N (یک عدد زوج است هرگاه بر ۲ بخش‌پذیر باشد) را برای تعریف عدد زوج در E در نظر بگیریم، در این‌صورت اعداد زوج بزرگ‌تر از ۲ عبارت‌اند از: ۴، ۸، ۱۲، ....؛ یعنی به استثنای عدد ۲، تنها اعداد به شکل $۴n$ که n متعلق به N است، در E زوج‌اند. همهٔ اعدادی که زوج نیستند بجز ۱، اول‌اند (چرا؟) و می‌توان آن‌ها را به صورت مجموع دو عدد زوج کوچک‌تر در این مجموعه بیان کرد. بنابراین اعداد اول را می‌توان به شکل $۴n - ۲$ برای nهای متعلق به N بیان کرد. حال، چگونه می‌توان هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ (که

1. M. L. Stein, S. M. Ulam, and M. B. Wells, "A Visual Display of Some Properties of the Distribution of Primes," *American Mathematical Monthly*, 71, 1964, pp. 515-20.

۱۰۰	۹۹	۹۸	۹۷	۹۶	۹۵	۹۴	۹۳	۹۲	۹۱
۶۵	۶۴	۶۳	۶۲	۶۱	۶۰	۵۹	۵۸	۵۷	۹۰
۶۶	۳۷	۳۶	۳۵	۳۴	۳۳	۳۲	۳۱	۵۶	۸۹
۶۷	۳۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۳۰	۵۵	۸۸
۶۸	۳۹	۱۸	۵	۴	۳	۱۲	۲۹	۵۴	۸۷
۶۹	۴۰	۱۹	۶	۱	۲	۱۱	۲۸	۵۳	۸۶
۷۰	۴۱	۲۰	۷	۸	۹	۱۰	۲۷	۵۲	۸۵
۷۱	۴۲	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۵۱	۸۴
۷۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۸۳
۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲

شکل ۱۳.۵

به شکل $۴n$ قابل بیان است) را به صورت مجموع دو عدد اول بیان کرد؟ یک راه بدیهی آن به‌صورت زیر است

$$۴n = (۴n - ۲) + ۲$$

و به این ترتیب، مسئله‌ای که در دنیای اعداد طبیعی برای قرن‌ها ریاضی‌دانان را به ستوه آورده است در E به یک مسئلهٔ ابتدایی تبدیل می‌شود

بنابراین در بررسی «اگر نه، چه؟»ها روی E که از N به‌دست آمده‌اند، می‌توان به درک عمیق‌تری از ویژگی‌های خاص و مشخصه‌های N دست یافت. حتی می‌توان بهتر از قبل عمل کرد، چون نیم‌نگاهی به یک پدیدهٔ بسیار جذاب و کلی‌تر انداخته‌ایم. گاه با ایجاد اصلاحاتی در موضوع مورد تحقیق، می‌بینیم که نتایجی بسیار دور از انتظارمان رخ می‌دهند!