۳

حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع مدول‌ها

از روش‌های متداول و ابتدایی برای ساختن مدول‌های جدید، با در دست داشتن خانواده‌ای ناتهی از مدول‌ها، تشکیل حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع آن‌هاست. حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع، هر یک توسط یک «خاصیت جهانی» به طور «یکتا» معین می‌شوند. با استفاده از خاصیت جهانی می‌توانیم این مفاهیم را برای شیءهای ریاضی دیگر نیز تعمیم دهیم.

در این فصل، حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع خانواده‌ای دلخواه از مدول‌ها را تعریف می‌کنیم و ارتباط بین آن‌ها و مفاهیم وابسته به آن‌ها را شرح خواهیم داد.

فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از R-مدول‌ها باشد. حاصل‌ضرب این خانواده، یعنی

$$\prod_{i\in I} M_i = \{(x_i) \mid x_i \in M_i \text{ ،} i \in I \text{ برای هر }\}$$

را در نظر می‌گیریم، جمع و ضرب در اسکالر را نیز به صورت

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i),$$

$$r(x_i) = (rx_i),$$

تعریف می‌کنیم. به‌سادگی دیده می‌شود که $\prod_{i\in I} M_i$ به همراه این جمع و ضرب در اسکالر به یک R-مدول تبدیل می‌شود. این R-مدول را **حاصل‌ضرب** خانوادهٔ داده شده تعریف می‌کنیم و اگر این خانواده تهی باشد، قرار می‌دهیم $\prod_{i\in I} M_i = 0$.

مثال ۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. $R[\![x]\!]$، یعنی حلقهٔ چندجمله‌ای‌های صوری را به‌عنوان R-مدول در نظر می‌گیریم. توجه کنید که هر عضو دلخواه از $R[\![x]\!]$ به صورت $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ است که

در آن، برای هر $i \geq \circ$، $a_i \in R$. امّا این عضو در واقع نشان‌دهندهٔ (a_i) است و نقش x^i در نماد صوری $\sum_{i=\circ}^{\infty} a_i x^i$ فقط مشخص کردن مکان a_i است؛ پس

$$R[\![x]\!] = \{(a_i) \mid a_i \in R \text{ ،} i \geq \circ \text{ برای هر}\} = \prod_{i \geq \circ} R.$$

پس حلقهٔ چندجمله‌ای‌های صوری به‌عنوان R-مدول، در واقع حاصل‌ضرب $\{R\}_{i\geq\circ}$ به‌عنوان خانواده‌ای از R-مدول‌هاست.

تذکر. گیریم $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از R-مدول‌ها باشد. $\prod_{i\in I} M_i$ را حاصل‌ضرب این خانواده در نظر می‌گیریم. به‌سادگی دیده می‌شود که تابع $p_i : \prod_{i\in I} M_i \to M_i$، با تعریف

$$p_i((x_i)) = x_i,$$

یک R-به‌روریختی است. هم‌چنین، تابع $\lambda_i : M_i \to \prod_{i\in I} M_i$، با تعریف

$$\lambda_i(x_i) = (\cdots, \circ, \cdots, \circ, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{محل } i\text{ام}}}{x_i}, \circ, \cdots, \circ, \cdots)^{1},$$

یک R-تک‌ریختی است. به‌علاوه، $p_i\lambda_i = 1_{M_i}$ و به‌ازای هر i که $j \neq i$، $p_i\lambda_j = o$.

در زیر گزاره‌ای را ثابت می‌کنیم که مدول‌هایی که با حاصل‌ضرب خانوادهٔ داده شده‌ای از مدول‌ها یک‌ریخت هستند را رده‌بندی می‌کند.

گزارهٔ ۱ (**خاصیت جهانی حاصل‌ضرب**). فرض‌کنید $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از R-مدول‌ها باشد.

۱. برای هر R-مدول مثل X و هر خانواده از R-هم‌ریختی‌ها مثل

$$\{f_i \mid X \to M_i\}_{i\in I},$$

R-هم‌ریختی یکتایی مثل $\varphi : X \to \prod_{i\in I} M_i$ موجود است که برای هر i، نمودار

---

[1] $(\cdots, \circ, \cdots, \circ, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{محل } j\text{ام}}}{a}, \circ, \cdots, \circ, \cdots)$ به معنی (x_i) است که در آن $x_j = a$ و اگر $i \neq j$، $x_i = \circ$.

$$\begin{tikzcd} & \prod\limits_{i\in I} M_i \arrow[d, "p_i"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\varphi"] \arrow[r, "f_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

را جابه‌جایی می‌کند.

۲. گیریم M یک R-مدول باشد. اگر R-هم‌ریختی‌هایی مثل $\widehat{p_i} : M \to M_i$ موجود باشند، با این ویژگی که برای هر R-مدول مثل X و هر خانواده از R-هم‌ریختی‌ها مثل $\{f_i \mid X \to M_i\}_{i\in I}$، R-هم‌ریختی یکتایی مثل $\varphi : X \to M$ را القا کنند که برای هر i نمودار

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\widehat{p_i}"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\varphi"] \arrow[r, "f_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

را جابه‌جایی کند، آن‌گاه $M \underset{R}{\cong} \prod\limits_{i\in I} M_i$.

برهان. ۱. تابع $\varphi : X \to \prod\limits_{i\in I} M_i$ را به صورت $\varphi(x) = (f_i(x))$ تعریف می‌کنیم. برای هر $x, x' \in X$ و هر $r \in R$،

$$\begin{aligned} \varphi(x+x') &= (f_i(x+x')) = (f_i(x) + f_i(x')) = (f_i(x)) + (f_i(x')) \\ &= \varphi(x) + \varphi(x'), \\ \varphi(rx) &= (f_i(rx)) = (rf_i(x)) = r(f_i(x)) = r\varphi(x). \end{aligned}$$

پس φ، R-هم‌ریختی است. از طرفی برای هر $i \in I$ و هر $x \in X$،

$$p_i\varphi(x) = p_i(\varphi(x)) = p_i((f_i(x))) = f_i(x),$$

و در نتیجه برای هر i، $p_i\varphi = f_i$، که نتیجه می‌دهد برای هر i، φ نمودار داده شده را جابه‌جایی می‌کند. از طرفی φ با این خاصیت یکتاست، زیرا اگر فرض کنیم R-هم‌ریختی‌ای مثل $\widehat{\varphi} : X \to \prod\limits_{i\in I} M_i$ نیز موجود باشد که برای هر i نمودار داده شده را جابه‌جایی کند، آن‌گاه برای هر $x \in X$، $\widehat{\varphi}(x) \in \prod\limits_{i\in I} M_i$ و در نتیجه، می‌توانیم بنویسیم $\widehat{\varphi}(x) = (\widehat{x_i})$. اکنون برای هر عضو دلخواه از I مثل i،

$$\widehat{x_i} = p_i((\widehat{x_i})) = p_i(\widehat{\varphi}(x)) = f_i(x)$$

و در نتیجه $(\widehat{x_i}) = (f_i(x))$، پس $\widehat{\varphi}(x) = \varphi(x)$؛ یعنی $\varphi = \widehat{\varphi}$. یعنی φ، R-هم‌ریختی یکتایی است که برای هر i نمودار داده شده را جابه‌جایی می‌کند.

۲. با توجه به فرض، R-هم‌ریختی یکتایی مثل $\varphi : \prod\limits_{i\in I} M_i \to M$ موجود است که برای هر i، نمودار

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\widehat{p}_i"] \\ \prod\limits_{i\in I} M_i \arrow[ur, dashed, "\varphi"] \arrow[r, "p_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

را جابه‌جایی می‌کند. از طرفی بنابر قسمت (۱)، R-هم‌ریختی یکتایی مثل $\psi : M \to \prod\limits_{i\in I} M_i$ موجود است که برای هر i، نمودار

$$\begin{tikzcd} & \prod\limits_{i\in I} M_i \arrow[d, "p_i"] \\ M \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[r, "\widehat{p}_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

را جابه‌جایی می‌کند. توجه کنید که برای هر i، از $p_i\varphi = \widehat{p}_i$ و $p_i\psi = \widehat{p}_i$ نتیجه می‌شود که $\widehat{p}_i\varphi\psi = \widehat{p}_i$ و $p_i\psi\varphi = p_i$، که نشان می‌دهد برای هر i، نمودارهای زیر جابه‌جایی هستند.

$$\begin{tikzcd} & \prod\limits_{i\in I} M_i \arrow[d, "p_i"] \\ \prod\limits_{i\in I} M_i \arrow[ur, "\psi\varphi"] \arrow[r, "p_i"'] & M_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\widehat{p}_i"] \\ M \arrow[ur, "\varphi\psi"] \arrow[r, "\widehat{p}_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

امّا توجه کنید که 1_M نیز نمودار سمت راست بالا را برای هر i جابه‌جایی می‌کند؛ پس، بنابر فرض، لزوماً $\varphi\psi = 1_M$. از طرفی $1_{\prod\limits_{i\in I} M_i}$ نیز نمودار سمت چپ بالا را برای هر i جابه‌جایی می‌کند؛ پس، بنابر قسمت (۱)؛ لزوماً $\psi\varphi = 1_{\prod\limits_{i\in I} M_i}$. در نتیجه، φ، R-یک‌ریختی است؛ پس $M \underset{R}{\cong} \prod\limits_{i\in I} M_i$. ■

تذکر. فرض کنید $\{\varphi_i \mid M_i \to N_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از R-هم‌ریختی‌ها باشد. در این صورت، بنابرگزارهٔ قبل، R-هم‌ریختی یکتایی مثل $\varphi\ \prod\limits_{i\in I} M_i \to \prod\limits_{i\in I} N_i$ موجود است که برای هر $i \in I$، نمودار