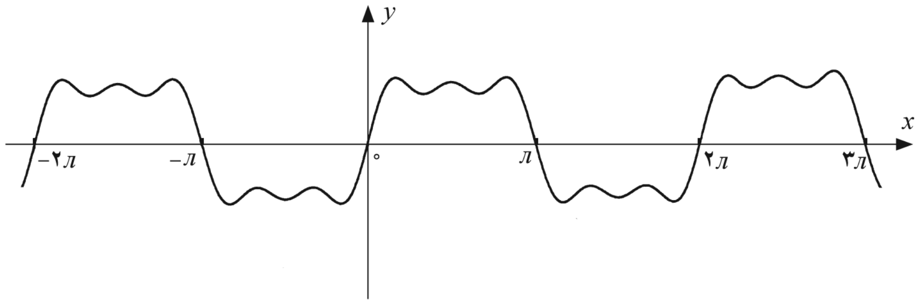
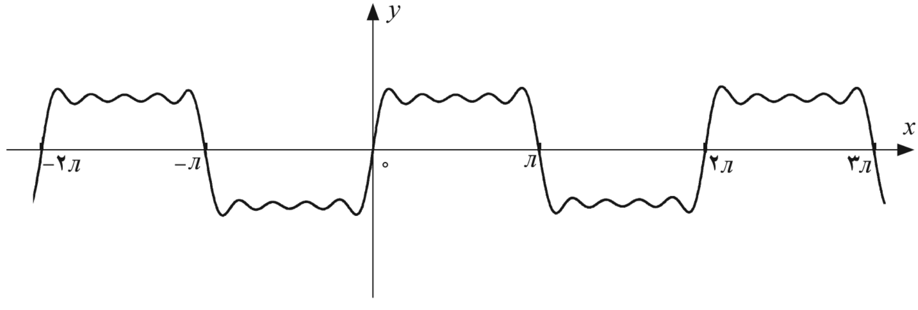
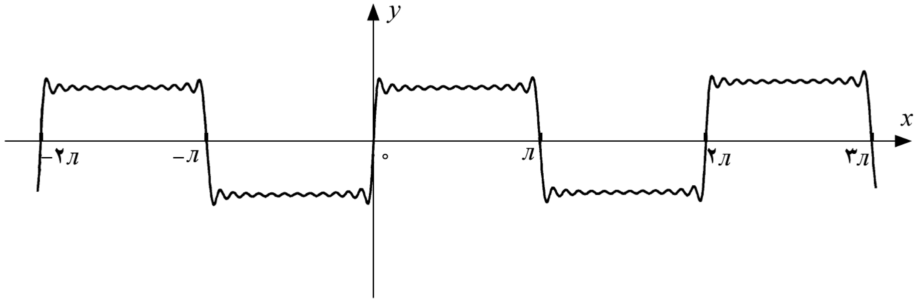


شکل ۳



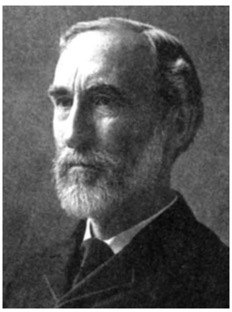
شکل ۴



شکل ۵

اگر $x_\circ$ نقطهٔ ناپیوستگی تابع f و S_n مجموع جزئی nاُم سری فوریهٔ f باشد، رفتار اختلاف S_n با f در یک همسایگی نقطهٔ $x_\circ$ به **پدیدهٔ گیبس** معروف است. مثلاً برای تابع f که در مثال ۱ تعریف شد، نقاط $x = \circ, \pm\pi, \pm ۲\pi, \ldots$ نقاط ناپیوستگی هستند و می‌توان نشان داد که در یک همسایگی از این نقاط، نمودار S_n برجستگی‌هایی را تشکیل می‌دهند که فاصلهٔ نوک آنها با مقدار تابع در آن نقاط مقدار ثابتی است و وقتی $n \to \infty$ این فاصله تغییر نمی‌کند (شکل‌های ۳، ۴ و ۵ را ببینید).

این پدیده نشان می‌دهد که سری فوریهٔ تابع f که در مثال ۱ معرفی شده است نمی‌تواند «همگرای یکنواخت» باشد. به همین دلیل تقریب یک تابع به وسیلهٔ سری فوریه در نزدیکی نقاط ناپیوستگی آن تابع دقت خاصی را می‌طلبد.



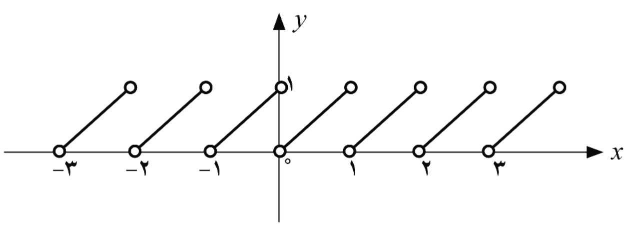
جوسایا ویلارد گیبس

جوسایا ویلارد گیبس ریاضی‌فیزیک‌دان مشهور امریکایی بود که در سال ۱۸۳۹ در نیوهیون متولد شد. آثار او در ریاضی‌فیزیک به عنوان پایه‌های اصلی ترمودینامیک شیمیایی مطرح است و به گسترش این دانش کمک زیادی کرده است. او یکی از پایه‌گذاران تحلیل برداری بوده است. گیبس در سال ۱۸۶۳ به عنوان اولین دریافت‌کنندهٔ دکترای مهندسی در ایالات متحده از دانشگاه ییل فارغ‌التحصیل شد. گیبس در سال ۱۹۰۳ دار فانی را وداع کرد.

با توجه به فرمول‌های اویلر ـ فوریه، ضرایب فوریهٔ تابع f تنها به مقدار f در بازهٔ $[-\ell, \ell]$ وابسته است؛ ولی از آنجا که $T = ۲\ell$ دورهٔ تناوب تابع f و نیز توابع مثلثاتی $\cos \frac{n\pi x}{\ell}$ و $\sin \frac{n\pi x}{\ell}$ است، می‌توان بازهٔ انتگرال‌گیری را در فرمول‌های اویلرـفوریه با هر بازهٔ دلخواهی به طول $T = ۲\ell$ به صورت $[\alpha, \alpha + ۲\ell]$ عوض کرد. این موضوع گاهی محاسبات را ساده می‌کند. مثال زیر این موضوع را روشن می‌کند.

مثال ۲

فرض کنید f تابعی حقیقی و متناوب با دورهٔ تناوب $T = ۱$ است که در بازهٔ $(۰, ۱)$ با ضابطهٔ $f(x) = x$ تعریف شده است. نمودار این تابع در شکل ۶ رسم شده است.



شکل ۶

اکنون ضرایب فوریهٔ تابع f را با استفاده از فرمول‌های اویلر ـ فوریه محاسبه می‌کنیم. به کارگیری تذکر بالا محاسبات را ساده‌تر می‌کند. به‌ازای $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$،

$$a_n = ۲ \int_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}} f(x) \cos ۲n\pi x dx = ۲ \int_{۰}^{۱} f(x) \cos ۲n\pi x dx$$

$$= ۲\int_{۰}^{۱} x\cos ۲n\pi x dx$$

$$= \begin{cases} ۲\left(\frac{۱}{۲}x^{۲}\Big|_{۰}^{۱}\right) & n = ۰ \\ ۲\left(x\frac{\sin ۲n\pi x}{۲n\pi} + \frac{\cos ۲n\pi x}{(۲n\pi)^{۲}}\right)\Big|_{۰}^{۱} & n = ۱, ۲, \ldots \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ۱ & n = ۰ \\ ۰ & n = ۱, ۲, \ldots \end{cases}$$

به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$،

$$b_n = ۲\int_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}} f(x)\sin ۲n\pi x dx = ۲\int_{۰}^{۱} f(x)\sin ۲n\pi x dx$$

$$= ۲\int_{۰}^{۱} x\sin ۲n\pi x dx$$

$$= ۲\left(-x\frac{\cos ۲n\pi x}{۲n\pi} + \frac{\sin ۲n\pi x}{(۲n\pi)^{۲}}\right)\Big|_{۰}^{۱}$$

$$= -\frac{۱}{n\pi}.$$

در نتیجه سری فوریهٔ تابع f برابر است با

$$\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin ۲n\pi x}{n} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{\pi}\left(\sin ۲\pi x + \frac{\sin ۴\pi x}{۲} + \frac{\sin ۶\pi x}{۳} + \ldots\right).$$

توجه کنید که سری فوریهٔ f در نقطهٔ $x = ۰$ به $\frac{۱}{۲}$ همگراست، ولی f در $x = ۰$ تعریف نشده است! البته همان‌طور که قبلاً نیز اشاره کردیم این موضوع ادعای فوریه را نقض نمی‌کند.

همگرایی سری‌های فوریه

تا اینجای کار با فرض همگرایی سری فوریهٔ تابع f به مقدار f در هر نقطه، به غیر از تعدادی متناهی نقطه در هر دورهٔ تناوب، و نیز چند فرض دیگر ضرایب فوریه به صورت فرمول‌های اویلر_ فوریه به دست آمد. مثال‌های ۱ و ۲ نشان می‌دهند که سری فوریهٔ تابع f می‌تواند در بعضی از نقاط به مقدار f در آن نقطه همگرا نباشد. حتی مثال‌هایی از توابعی وجود دارد که سری فوریهٔ متناظر با آن توابع اصلاً همگرا نیست. در اینجا همگرایی سری‌های فوریه را بررسی می‌کنیم.

قبل از بیان قضیهٔ همگرایی سری‌های فوریه، لازم است تابع قطعه به قطعه پیوسته را تعریف کنیم. می‌گوییم تابع حقیقی f در بازهٔ $[a,b]$ **قطعه به قطعه پیوسته** است اگر تعدادی متناهی نقطهٔ $a = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n = b$ وجود داشته باشند که f در زیربازه‌های $(x_i, x_{i+۱})$ پیوسته باشد و در نقاط انتهایی هر زیربازه حدود یک‌طرفهٔ متناهی داشته باشد. توجه کنید که لازم نیست تابع f در نقاط x_i تعریف شده باشد.

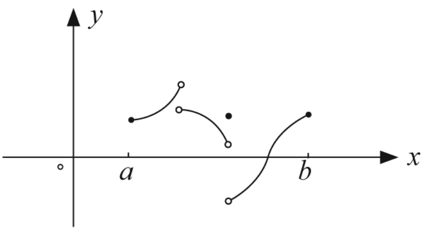
نماد $f(c^+)$ را برای نشان دادن حد راست تابع f در نقطهٔ c به کار می‌بریم، یعنی

$$f(c^+) = \lim_{x \to c^+} f(x),$$

و به‌طور مشابه

$$f(c^-) = \lim_{x \to c^-} f(x).$$

اگر c نقطهٔ پیوستگی تابع f باشد، $f(c^+) = f(c^-) = f(c)$. بنابراین برای هر تابع قطعه به قطعه پیوستهٔ f، مقادیر $f(x^+)$ و $f(x^-)$ در هر نقطهٔ x موجود و متناهی هستند. شکل ۷ مثالی از نمودار تابعی قطعه به قطعه پیوسته را نشان می‌دهد. توابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ و $f(x) = \sin \frac{۱}{x}$ در بازهٔ بستهٔ $[۰, ۱]$ قطعه به قطعه پیوسته نیستند، زیرا مقدار $f(۰^+)$ برای تابع اوّل نامتناهی است و برای تابع دوم وجود ندارد.



شکل ۷. نمودار تابعی قطعه به قطعه پیوسته

قضیهٔ ۱ (فوریه). فرض کنید f تابعی حقیقی و متناوب با دورهٔ تناوب $T = ۲\ell$ است. اگر f و f' در بازهٔ $[-\ell, \ell]$ قطعه به قطعه پیوسته باشند، به‌ازای هر x، سری فوریهٔ f در نقطهٔ x به $\frac{۱}{۲}\big(f(x^+) + f(x^-)\big)$ همگراست. به‌ویژه، اگر f در x پیوسته باشد، سری فوریهٔ f در نقطهٔ x به $f(x)$ همگراست.

ژان باپتیست ژوزف فوریه

ژان باپتیست ژوزف فوریه ریاضی‌دان و فیزیک‌دان فرانسوی بود که در ۲۱ مارس ۱۷۶۸ در اوسر متولد شد. پدر فوریه خیاط بود و زمانی که او هشت سال بیشتر نداشت، از دنیا رفت. فوریه در مدرسهٔ نظامی زادگاهش شروع به تحصیل کرد. او در ۱۸ سالگی در همین دانشگاه به تدریس ریاضی مشغول شد و هنگام انقلاب فرانسه، از آن حمایت کرد. در دوران ترور مدتی به زندان افتاد؛ اما در سال ۱۷۹۵ آزاد شد و به استخدام اکول نرمال سوپریور در آمد. او از سال ۱۷۹۷ به عنوان جانشین لاگرانژ در اکول پلی‌تکنیک به تدریس مشغول شد. فوریه در اواخر قرن هجدهم، ناپلئون بناپارت را در لشگرکشی به مصر همراهی می‌کرد. او در مصر به عنوان فرماندار مصر سفلی و نیز دبیر بنیاد مصرشناسی مشغول بود. پس از بازگشت از مصر، در سال ۱۸۰۱ به عنوان فرماندار ایزر منصوب شد و در سال ۱۸۰۸ به لقب بارون دست یافت. او از سال ۱۸۲۲ تا پایان عمرش دبیر دائمی فرهنگستان علوم فرانسه بود. فوریه در زمینهٔ فیزیک بر روی انتقال گرما تحقیق می‌کرد و قانون فوریه در این زمینه از او به جای مانده است. فوریه همچنین کاربردهای سری‌های فوریه در زمینهٔ انتقال گرما و نیز ارتعاشات را معرفی کرد. فوریه در ۱۶ مه ۱۸۳۰ در سن ۶۲ سالگی در پاریس از دنیا رفت. جسد او در گورستان پر ـ لاشز دفن شده است. فوریه یکی از ۷۲ نفر فرانسوی است که نام آنها بر روی برج ایفل حک شده است.

توجه کنید که قضیهٔ فوریه نشان می‌دهد مشروط بر آنکه f و f' قطعه به قطعه پیوسته فرض شوند، ادعای فوریه درست است. براساس این قضیه می‌توانیم حاصل سری‌های فوریه را محاسبه کنیم. مثلاً تابعی را که در مثال ۱ تعریف شده است در نظر بگیرید. این تابع در نقاط $x = k\pi$ $(k = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots)$ ناپیوسته است و در بقیهٔ نقاط پیوسته؛ اما برای این تابع شرایط قضیهٔ فوریه برقرار است. با توجه به اینکه $\frac{۱}{۲}\left(f(k\pi^+) + f(k\pi^-)\right) = ۰$، می‌توان نوشت

$$\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin(۲n-۱)k\pi}{۲n-۱} = ۰.$$

تساوی بالا به‌ازای $k = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots$ به تساوی بدیهی منجر می‌شود. همچنین، به‌ازای هر $x \in (k\pi, (k+۱)\pi)$ $(k = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots)$ می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin(۲n-۱)x}{۲n-۱} = f(x) = \begin{cases} ۱ & k\pi < x < (k+۱)\pi \\ & k = ۰, \pm۲, \pm۴, \ldots \\ -۱ & k\pi < x < (k+۱)\pi \\ & k = \pm۱, \pm۳, \pm۵, \ldots \end{cases}$$