اگر

$$u = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)x = \alpha x$$

که $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^t$ مختص u نسبت به پایهٔ α است، آن‌وقت

$$\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(\alpha x) = (\mathcal{A}(\alpha))x = (\beta A)x = \beta(Ax)$$

یعنی اینکه Ax بردار مختص $\mathcal{A}(u) \in W$ نسبت به پایهٔ β است. بنابراین تبدیل خطی $\mathcal{A}$ با توجه به ماتریس A تعیین می‌شود. این ماتریس A را که متناظر $\mathcal{A}$ است نمایش ماتریسی تبدیل خطی $\mathcal{A}$ نسبت به پایه‌های (مرتب) α از V و β از W می‌نامند.

اگر $V = W$ و $\alpha = \beta$، آن‌وقت $\mathcal{A}(\alpha) = \alpha A$؛ به سادگی می‌گوییم A ماتریس $\mathcal{A}$ تحت، یا نسبت به پایهٔ α است. اگر $V = \mathbb{F}^m$ و $W = \mathbb{F}^n$، با پایه‌های استاندارد $\alpha = \{e_1, \ldots, e_m\}$ و $\beta = \{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ باشند، آن‌گاه

$$\mathcal{A}(u) = Ax$$

ماتریس‌های عملگری خطی متشابه‌اند. فرض کنید V فضایی برداری از بعد n باشد. فرض کنید α و β دو پایه برای V باشند. در این‌صورت ماتریسی مربعی، $n \times n$، و وارون‌پذیر مانند P وجود دارد که $\beta = \alpha P$. فرض کنید A_1 ماتریس $\mathcal{A}$ تحت پایهٔ α باشد؛ یعنی $\mathcal{A}(\alpha) = \alpha A_1$. فرض کنید A_2 ماتریس تحت β باشد. ادعا می‌کنیم A_1 و A_2 متشابه‌اند. چون

$$\mathcal{A}(\beta) = \mathcal{A}(\alpha P) = (\mathcal{A}(\alpha))P = (\alpha A_1)P = \beta(P^{-1}A_1P)$$

پس $A_2 = P^{-1}A_1P$، بنابراین ماتریس‌های عملگری خطی تحت پایه‌هایی متفاوت متشابه‌اند.

مقدارهای ویژهٔ عملگری خطی. فرض کنید $\mathcal{A}$ تبدیلی خطی روی فضایی برداری مانند V روی $\mathbb{F}$ باشد. اسکالری مانند $\lambda \in \mathbb{F}$ مقداری ویژه برای $\mathcal{A}$ است اگر به‌ازای برداری ناصفر مانند u، $\mathcal{A}(u) = \lambda u$. چنین بردار uای را برداری ویژه متناظر با مقدار ویژهٔ λ گویند.

فرض کنید A ماتریس $\mathcal{A}$ تحت پایه‌ای مانند α از V باشد و x مختص بردار u تحت α باشد؛ یعنی، $u = \alpha x$. در این‌صورت

$$\alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x) = \lambda u = \mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(\alpha x) = (\mathcal{A}(\alpha))x = (\alpha A)x = \alpha(Ax)$$

بنابراین $\mathcal{A}(u) = \lambda u$ معادل با $Ax = \lambda x$ است. بنابراین مقدارهای ویژهٔ تبدیل خطی $\mathcal{A}$ همان مقدارهای ویژهٔ ماتریس آن یعنی A تحت پایه α هستند. توجه کنید که مقدارهای ویژهٔ ماتریس‌های متشابه با هم برابر است. مقدارهای ویژهٔ $\mathcal{A}$ مربوط به ماتریس‌های آن مستقل از نحوهٔ انتخاب پایه‌ها هستند.

زیرفضای ناوردا. فرض کنید $\mathcal{A}$ عملگری خطی روی فضایی برداری مانند V باشد. اگر W زیرفضایی از V باشد که به‌ازای هر $w \in W$، $\mathcal{A}(w) \in W$؛ یعنی، $\mathcal{A}(W) \subseteq W$، آن‌وقت می‌گوییم W تحت $\mathcal{A}$ ناورداست. هر دو $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ و $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ زیرفضاهایی ناوردا تحت عملگر خطی مانند $\mathcal{A}$ هستند.

مسأله‌های فصل ۳

۱.۳ فرض کنید A و B ماتریس‌هایی مربعی و $n \times n$ باشند. درست یا نادرست بودن عبارات زیر را تعیین کنید.

(الف) اگر $A^{2} = 0$، آن‌وقت $A = 0$.

(ب) اگر $A^{2} = 0$ و λ مقدار ویژه‌ای برای A باشد، آن‌وقت $\lambda = 0$.

(ج) اگر $A^{2} = 0$، آن‌وقت رتبهٔ A حداکثر ۲ است.

(د) اگر $A^{2} = A$، آن‌وقت $A = 0$ یا $A = I$.

(هـ) اگر $A^{*}A = 0$، آن‌وقت $A = 0$.

(و) اگر $AB = 0$، آن‌وقت $A = 0$ یا $B = 0$.

(ز) اگر $|AB| = 0$، آن‌وقت $|A| = 0$ یا $|B| = 0$.

(ح) $AB = BA$.

(ط) $|AB| = |BA|$، که A، $m \times n$ و B، $n \times m$ است.

(ی) $|A + B| = |A| + |B|$.

(ک) $(A + I)^{2} = A^{2} + 2A + I$.

(ل) به‌ازای هر اسکالر مانند k، $|kA| = k|A|$.

۲.۳ فرض کنید A و B ماتریس‌هایی $n \times n$ باشند. ثابت کنید

$$(A + B)^{2} = A^{2} + 2AB + B^{2}$$

اگر و فقط اگر A و B تعویض‌پذیر باشند؛ یعنی، $AB = BA$.

۳.۳ فرض کنید A و B ماتریس‌هایی $n \times n$ باشند. ثابت کنید

$$AB = A \pm B \Rightarrow AB = BA$$

۴.۳ a و b را طوری بیابید که دو ماتریس زیر متشابه باشند:

$$A = \begin{pmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۲ & a & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & b \end{pmatrix}$$

۵.۳ چه ماتریس‌هایی فقط با خودشان متشابه‌اند؟

۶.۳ ماتریسی مانند X را هم‌ارز ماتریسی مانند A گوییم. اگر به‌ازای ماتریس‌هایی وارون‌پذیر مانند P و Q، $PXQ = A$؛ همنهشت با A گوییم اگر به‌ازای ماتریسی وارون‌پذیر مانند P، $P^tXP = A$؛ و متشابه با A گوییم اگر به‌ازای ماتریسی وارون‌پذیر مانند P، $P^{-۱}XP = A$.
فرض کنید A ماتریس قطری $\mathrm{diag}(۱, ۲, -۱)$ است. تعیین کنید کدام‌یک از ماتریس‌های

$$B = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}$$

(الف) هم‌ارز با A؛

(ب) همنهشت با A؛ یا

(ج) متشابه با A

است.

۷.۳ کدام‌یک از ماتریس‌های زیر با ماتریس $A = \mathrm{diag}(۱, ۴, ۶)$ متشابه است؟

$$B = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۴ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۶ \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۷ & ۱ & ۰ \\ ۸ & ۹ & ۶ \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۳ & ۴ & ۵ \\ ۰ & ۷ & ۶ \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} ۴ & ۷ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۸ & ۹ & ۶ \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۳ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۶ \end{pmatrix}, \ G = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۵ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۵ \end{pmatrix}$$

۸.۳ فرض کنید $a, b, c \in \mathbb{R}$. با چه شرطی ماتریس

$$\begin{pmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ a & ۲ & ۰ \\ b & c & -۱ \end{pmatrix}$$

با ماتریسی قطری متشابه است؟

۹.۳ به‌ازای اسکالرهایی دلخواه مانند a، b و c، ثابت کنید ماتریس‌های

$$A = \begin{pmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} c & a & b \\ a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

متشابه‌اند. همچنین اگر $BC = CB$، آنگاه A دو مقدار ویژهٔ صفر دارد.

۱۰.۳ فرض کنید E_{ij} ماتریسی مربعی و $n \times n$ باشد که درایهٔ (i, j) آن ۱ است و بقیهٔ درایه‌هایش صفرند، $i, j = ۱, ۲, \ldots, n$. اگر $A \in M_n(\mathbb{C})$، AE_{ij}، $E_{ij}A$ و $E_{ij}AE_{st}$ را بیابید.

۱۱.۳ $A^۲$ و $A^۶$ را حساب کنید، که

$$A = \begin{pmatrix} -۱ & ۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ & -۱ \end{pmatrix}$$

۱۲.۳ $A^{۱۰۰}$ را بیابید، که

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{pmatrix}$$

۱۳.۳ اگر k عددی صحیح و مثبت باشد و $k \geq ۲$،

$$\begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{pmatrix}^k,\ \begin{pmatrix} \lambda & ۱ \\ ۰ & \lambda \end{pmatrix}^k,\ \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}^k,\ \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}^k$$

را حساب کنید.