

## منظور از موفقیت در ریاضیات چیست؟

تجزیه و تحلیل‌های ما از ریاضیاتی که باید آموخته شود، مطالعه‌ی پژوهش‌های مربوط به روانشناسی شناختی و آموزش ریاضی، تجربیاتمان به عنوان یادگیرندگان و معلمان ریاضی و قضاوت‌های حرفه‌ایمان، همگی ما را در انتخاب دیدگاهی ترکیبی نسبت به معنای موفقیت در یادگیری ریاضی هدایت کرده‌اند. چون پی‌بردیم که هیچ اصطلاحی تمام جنبه‌های تجربه، تبحر، دانش و مهارت در ریاضیات را در بر نمی‌گیرد، اصطلاح ورزیدگی ریاضی را انتخاب کردیم تا نشان دهیم منظورمان از این که هر فرد باید ریاضیات را با موفقیت بیاموزد، چیست.

ورزیدگی ریاضی پنج مؤلفه دارد [۳]:

۱. **فهمیدن:** درک مفاهیم، اعمال و روابط ریاضی، دانستن معنای نمادهای ریاضی، نمودارها و رویه‌ها.
۲. **محاسبه کردن:** اجرای رویه‌های ریاضی، نظیر جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد به طور منعطف، دقیق، کارا و مناسب.
۳. **به کار بردن:** توانایی صورت‌بندی مسایل به صورت ریاضی و تدوین راهکارهایی جهت حل آنها با استفاده از مفاهیم و رویه‌های مناسب.
۴. **استدلال کردن:** استفاده از منطق جهت توضیح و توجیه راه حلی برای یک مسأله یا تعمیم چیزی معلوم به چیزی که هنوز معلوم نیست.
۵. **درگیر شدن:** دیدن ریاضیات، به صورت محسوس، مفید و قابل انجام به شرطی که روی آن کار کنید و بخواهید که آن کار را انجام دهید.

مهم‌ترین ویژگی ورزیدگی ریاضی این است که این پنج مؤلفه به هم وابسته و در هم تنیده‌اند. سایر دیدگاه‌ها نسبت به یادگیری ریاضی مایلند که تنها به یک جنبه‌ی ورزیدگی تأکید کنند و انتظار دارند که پیامد آن، توسعه‌ی جنبه‌های دیگر باشد. مثلاً، بعضی از کسانی که بر نیاز دانش‌آموزان به کسب مهارت در محاسبات تأکید دارند، فرض می‌کنند که در پی کسب این مهارت، فهمیدن ریاضی حاصل می‌شود؛ یا

کسانی که فهمیدن مفاهیم را مورد نظر دارند، تصور می‌کنند که با ایجاد فهم و درک، مهارت در محاسبه نیز به طور طبیعی کسب می‌شود. با استفاده از این پنج مؤلفه کوشیده‌ایم تصویر همه‌جانبه‌تری از یادگیری توأم با موفقیت در ریاضیات را ارائه کنیم.

در این کتاب فرض غالب این است که تمام دانش‌آموزان می‌توانند و باید در ریاضیات ورزیده شوند. همان‌گونه که همه‌ی دانش‌آموزان می‌توانند با مهارت بخوانند همه می‌توانند در ریاضیات مدرسه‌ای نیز ماهر شوند. ورزیدگی ریاضی چیزی نیست که دانش‌آموزان وقتی به پایه‌ی هشتم یا دوازدهم می‌رسند آن را کسب کنند؛ ورزیدگی می‌تواند در همه‌ی پایه‌ها کسب شود. علاوه بر این، ورزیدگی ریاضی دیگر فقط به رده‌ی خاصی از دانش‌آموزان محدود نمی‌شود. اگر قرار است ایالات متحده نیروی کار تحصیل کرده و شهروندانی پرورش دهد که دنیای فردا به آنها نیاز دارد، تمام آمریکایی‌های جوان باید بیاموزند ریاضی‌وار بیندیشند.

## پنج مؤلفه

(۱) فهمیدن: درک مفاهیم، عملیات و روابط ریاضی، دانستن معنای نمادهای ریاضی، نمودارها و رویه‌ها.

منظور از فهمیدن، درک ایده‌های بنیادی ریاضی توسط دانش‌آموز است. دانش‌آموزانی که فهم ریاضی دارند، به چیزی بیش از حقایق<sup>۱</sup> و رویه‌های منفک از هم دست می‌یابند. آنها می‌دانند چرا یک ایده‌ی ریاضی مهم است و زمینه‌هایی را که به‌کارگیری آن مفید است می‌شناسند. علاوه بر این، دانش‌آموزان از بسیاری از ارتباطات و پیوندهای بین ایده‌های ریاضی آگاه هستند. در حقیقت، درجه‌ی فهم دانش‌آموزان با ژرفا و وسعت این ارتباطات و اتصالات، مرتبط است.

به‌طور مثال، دانش‌آموزانی که تقسیم کسرها را می‌فهمند، نه تنها  $9 \div \frac{2}{3} = 6$  را محاسبه می‌کنند، بلکه می‌توانند عمل تقسیم را با شکل نیز نمایش دهند و در ارتباط با این محاسبه، مسأله‌ای هم طرح کنند. (اگر در دستور پخت کیک نوشته شده باشد که به  $\frac{2}{3}$  پیمانه شکر نیاز است و ما ۶ پیمانه شکر در اختیار داشته باشیم، این مقدار شکر چند برابر دستور پخت کیک است؟)

دانش‌آموزانی که ریاضی را با فهم و درک یاد می‌گیرند، نیاز به صرف وقت زیاد برای یادگیری ندارند، زیرا الگوهای مشترک را بین وضعیت‌های ظاهراً متفاوت می‌بینند. اگر به این کلی پی ببرند که جابجایی در ضرب تأثیر ندارد - مثلاً:  $5 \times 3$  همان  $3 \times 5$  است - آنها تقریباً نصف حقایق مربوط به

---

۱. منظور از حقایق، دانش یقینی است. مثلاً در کتاب‌های درسی ریاضی ابتدایی، به هر عبارت جمع که یک عدد را می‌سازد، یک حقیقت عددی گفته می‌شود. به طور مثال، برای ساختن عدد ۵، هر یک از عبارت‌های زیر یک حقیقت نامیده می‌شوند:  $1+4$ ،  $1+1$ ،  $2+3$ ،  $3+2$ ،  $4+1$ ،  $1+2+2$ ، و ...

ضرب اعداد را آموخته‌اند. یا اگر دانش‌آموزان این اصل کلی را یاد بگیرند که اگر اندازه‌ی ابعاد یک شیء سه‌بعدی (نظیر قوطی کبریت) را  $n$  برابر کنیم، حجمش  $n^3$  برابر می‌شود، آنگاه می‌توانند وضعیت‌های بسیاری را درک کنند که در آنها، اشیا در شکل‌های مختلف، به یک نسبت بزرگ یا کوچک می‌شوند. (به‌طور مثال، می‌توانند بفهمند چرا ارتفاع پیمانه‌ای که حجمش ۱۶ واحد مکعب است، به مراتب کمتر از نصف ارتفاع پیمانه‌ای به همان شکل است که حجمش ۸ واحد مکعب است.)

دانشی که از فهمیدن به‌دست می‌آید، اساسی برای به‌خاطر آوردن یا بازسازی حقایق و روش‌های ریاضی و مبنایی برای حل مسایل تازه و ناآشنا و تولید دانش جدید می‌شود. مثلاً، دانش‌آموزانی که عملیات با اعداد حسابی را خوب بفهمند، می‌توانند همین مفاهیم و رویه‌ها را برای انجام عملیات بر روی اعداد اعشاری نیز تعمیم دهند.

هم‌چنین، فهمیدن به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا در حل مسأله از خطاهای اساسی پرهیز کنند - به ویژه مسایلی که به بزرگی اعداد مربوط می‌شوند - هر دانش‌آموزی که فهم خوبی از عدد داشته باشد و از ضرب  $9/83$  در  $7/65$  عدد  $7519/95$  را بدست آورد، باید بلافاصله به خطای خود پی ببرد، چون می‌داند پاسخ نمی‌تواند بیش از  $10$  ضرب در  $8$  یعنی  $80$  باشد، زیرا یکی از این دو عدد کمتر از  $10$  و دیگری کمتر از  $8$  است. این استدلال به دانش‌آموز می‌فهماند که احتمالاً ممیز جابه‌جا شده است.

**(۲) محاسبه‌کردن: اجرای رویه‌های ریاضی نظیر جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد به نحوی منعطف، دقیق، کارا و مناسب.**

محاسبه، شامل آشنایی کافی با رویه‌هایی برای جمع، تفریق، ضرب و تقسیم ذهنی یا با استفاده از کاغذ و قلم و نیز دانستن زمان و نحوه‌ی استفاده مناسب از این رویه‌ها است. هر چند کلمه‌ی محاسبه عمدتاً رویه‌های رایج در حساب را تداعی می‌کند، اما، در این سند، آشنایی کافی با رویه‌های سایر شاخه‌های ریاضی نظیر اندازه‌گیری (محاسبه طول)، جبر (حل معادلات)، هندسه (رسم شکل‌های مشابه) و آمار (رسم نمودار داده‌ها) نیز محاسبه تلقی می‌شوند. منظور از **روانی**، داشتن مهارت در به‌کار بردن کارا، دقیق و منعطف رویه‌ها است.

دانش‌آموزان نیازمندند ترکیبی از اعمال اصلی  $(5+6, 9-17, 4 \times 8)$  و نظایر آنها را سریع و دقیق انجام دهند. هم‌چنین، نیازمندند الگوریتم‌ها را دقیق و کارا بیاموزند - رویه‌های گام به گام را برای جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد حسابی چندرقمی، کسرها و اعداد اعشاری و برای انجام سایر محاسبات یاد بگیرند. مثلاً، تمام دانش‌آموزان باید الگوریتمی برای ضرب  $64$  در  $37$  داشته باشند که آن را بفهمند، به اندازه‌ی کافی کارا باشد و آنقدر عمومی که بتواند در مورد سایر اعداد دو رقمی نیز به کار رود و قابل گسترش برای ضرب اعداد بزرگ‌تر هم باشد.

استفاده از ماشین حساب نباید تهدیدی برای توسعه‌ی مهارت‌های محاسباتی باشد. به‌عکس، ماشین حساب‌ها می‌توانند هم فهمیدن و هم محاسبه کردن را تقویت کنند [۴]. اما نظیر هر ابزار تدریسی دیگری از ماشین حساب و رایانه هم می‌توان به طور مؤثر استفاده کرد و هم به طور نامناسب و غیرمؤثر.

معلم‌ان باید روش استفاده از این ابزارها را یاد بگیرند و استفاده از آنها را چنان به دانش‌آموزان یاد دهند که حامی تمام مؤلفه‌های ورزیدگی باشد و آنها را با هم تلفیق کند.

دقت و کارایی در استفاده از رویه‌ها اهمیت دارند و محاسبه نیز قدرت درک را بالا می‌برد. با به کار بردن رویه‌هایی به قدر کافی کلی برای حل تمام مسایل از یک رده‌ی خاص، نظیر رویه‌ی جمع کردن دو کسر، دانش‌آموزان می‌فهمند که ریاضیات قابل پیش‌بینی و خوش‌ساختار است و الگوهای فراوان دارد و به ارزش آنها پی می‌برند.

وقتی دانش‌آموزان صرفاً رویه‌ها را به خاطر می‌سپارند، ممکن است نتوانند ایده‌های عمیق‌تری را درک کنند که به خاطر سپردن گام‌ها و به کار بردن آموخته‌ها را برایشان آسان‌تر می‌نمایند. به طور مثال، هنگام تفریق بسیاری از دانش‌آموزان بدون توجه به این که عدد کجا قرار گرفته، عدد کوچک‌تر موجود در هر ستون را از عدد بزرگ‌تر کم می‌کنند و به پاسخ‌های غلطی نظیر مثال زیر دست می‌یابند:

$$\begin{array}{r} 62 \\ - 48 \\ \hline \end{array} \quad (\text{به جای } 14) \quad 26$$

کودکی که با درک موضوع، تفریق را می‌آموزد، به ندرت این‌گونه خطاها را انجام می‌دهد [۵].

در ریاضیات مدرسه‌ای ایجاد مهارت‌های محاسباتی و ایجاد فهم و درک، گویی رقیب یکدیگرند. اما، قرار دادن مهارت در مقابل فهم و درک، تقابل نادرستی پدید می‌آورد. فهمیدن، یادگرفتن مهارت‌ها را آسان‌تر می‌سازد و در عین حال یادگرفتن رویه‌ها، فهمیدن ریاضیات را تقویت می‌کند و آن را گسترش می‌دهد.

## در «زور آزمایی ریاضی» حق با کدام جبهه است؟

در تلاش برای انجام اصلاحات در دهه‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ مهارت‌های محاسباتی دست‌کم گرفته شدند و به جای آن تأکید شد که دانش‌آموزان باید ریاضی را بفهمند و قادر به استفاده از آن باشند. حتی در موارد افراطی از دانش‌آموزان انتظار می‌رفت که بدون کمک یا با اندکی راهنمایی، به خلق یا ایجاد ریاضی بپردازند. واکنش به این تلاش‌ها باعث توجه فزاینده به یادگیری حافظه‌ای و مهارت‌های محاسباتی شد به گونه‌ای که از دانش‌آموزان انتظار می‌رفت تا رویه‌های معرفی شده توسط معلمان یا کتاب‌های درسی را به خوبی یاد بگیرند و قادر به استفاده از آنها شوند. برخورد این وضعیت‌های متناقض «زور آزمایی ریاضی» نامیده شده است.

حق با کدام جبهه است؟ هیچ‌کدام! هر دو بسیار محدودند. وقتی افراد تنها از یک مؤلفه‌ی ورزشی جانبداری می‌کنند دیدگاه کلی هدف را از دست می‌دهند. چنین برخورد تنگ نظرانه‌ای با ریاضیات، ممکن است یکی از دلایل عملکرد ضعیف دانش‌آموزان آمریکایی در ارزیابی‌های ملی و بین‌المللی باشد.

اگر تدریس ریاضی بر اساس دیدگاه‌های افراطی صورت گیرد، نمی‌تواند تأثیرگذار باشد. به شرطی دانش‌آموزان در ریاضی ورزیده‌تر می‌شوند که مفاهیم اصلی ریاضی را بفهمند، همچنان که اگر در رویه‌های محاسباتی ماهرتر شوند، مفاهیم را آسان‌تر می‌فهمند. دانش‌آموزان آمریکایی به مهارت و درک بیشتر نیازمندند و همراه با آنها باید توانایی به کار گرفتن مفاهیم را برای حل مسأله کسب کنند، به طور منطقی استدلال نمایند و ریاضیات را محسوس، مفید و قابل انجام ببینند. بدون توسل به همه‌ی این توصیه‌ها، دانشی شکننده، منقطع، و ضعیف کسب خواهد شد.

### (۳) به کاربردن: توانایی صورت‌بندی مسایل به صورت ریاضی و تدوین راهکارهایی جهت حل آنها با استفاده از مفاهیم و رویه‌های مناسب.

به کاربردن، متضمن این است که فرد از دانش مفهومی و دانش رویه‌ای<sup>۱</sup> خود برای حل مسایل استفاده کند. یک مفهوم یا رویه وقتی مفید است که دانش‌آموز تشخیص دهد کی و کجا کاربرد دارد و نیز کی و کجا قابل استفاده نیست. در مدرسه، به دانش‌آموزان مسایل خاصی برای حل کردن می‌دهند، اما در بیرون از مدرسه، بخشی از مشکل پی‌بردن به این نکته است که دقیقاً، مسأله چیست<sup>۲</sup>. بنابراین، لازم است دانش‌آموزان بتوانند مسأله نیز طرح کنند، استراتژی‌های مناسب برای حل آن بیافرینند و مفیدترین روش را برای حل مسأله برگزینند. لازم است بدانند چگونه کمیت‌ها را در ذهن تجسم کنند یا آنها را روی کاغذ به تصویر کشند. هم‌چنین لازم است بدانند چگونه باید معلوم‌ها و اطلاعات مرتبط را تشخیص دهند و بر اساس آنها، مجهول‌ها را بشناسند.

همیشه می‌توان مسایل معمولی را با استفاده از رویه‌های متعارف حل کرد. مثلاً، بسیاری از دانش‌آموزان پایه‌ی دوم می‌دانند که برای پاسخ دادن به پرسش زیر، باید از عمل جمع استفاده کنند:

«اگر ۱۲ دانش‌آموز در مینی‌بوس باشند و ۷ نفر دیگر به آنها بپیوندند، چند دانش‌آموز در مینی‌بوس خواهند بود؟»

اما برای مسایل غیر معمولی، دانش‌آموزان باید راهی برای درک مسأله و حل آن بیابند. به طور مثال، ممکن است از دانش‌آموز پایه‌ی دوم سؤال شود: «مینی‌بوسی ۷ ردیف صندلی دارد که روی هر صندلی ۲ یا ۳ نفر جا می‌گیرند. برای نشستن ۱۹ نفر بر روی ۷ ردیف صندلی موجود، روی چند صندلی باید ۲ نفر و روی چند صندلی ۳ نفر بنشینند؟» برای پاسخ دادن به این پرسش، آنها باید روشی برای حل بیافرینند، کمیت‌های موجود در مسأله را بفهمند، روابط بین آنها را درک کنند و مهارت‌های محاسباتی لازم برای حل مسأله را داشته باشند (یعنی برخلاف مسایل معمولی، تنها با انتخاب یک رویه، نمی‌توان این مسأله را حل کرد بلکه پیش‌نیاز انتخاب رویه، فهم و درک اشاره شده است).

---

۱. دانش مفهومی و دانش رویه‌ای دو مؤلفه‌ی اصلی نظریه‌ی فهم و درک رابطه‌ای ریچارد اسکمپ است. اسکمپ عقیده دارد که وظیفه‌ی آموزش ریاضی مدرسهای، ایجاد تعادل بین این دو نوع دانش برای رسیدن به فهم و درک رابطه‌ای است. برای اطلاعات بیشتر می‌توانید به منبع زیر مراجعه کنید: اسکمپ، ریچارد، (۱۹۷۳). فهم رابطه‌ای و فهم ابزاری، ترجمه‌ی رضا حیدری قزلبچه و زهرا گویا (۱۳۸۴). مجله‌ی رشد آموزش ریاضی. پاییز ۱۳۸۴. صص ۴ تا ۱۵.

۲. شناخت مسأله و درک آن، بخش مهمی از فرایند حل مسأله است که جورج پولیا در کتاب **چگونه مسأله را حل کنیم** (ترجمه‌ی احمد آرام، انتشارات کیهان)، به طور مبسوط به آن پرداخته است. هم‌چنین، براون در کتاب **هنر طرح مسأله**، راجع به چگونگی ایجاد این مهارت در دانش‌آموزان، بحث‌های جالبی مطرح کرده است.